Nouvelles annales de mathématiques

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 136-143
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__136_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 584 (*)

(voir 1re série, t. XX, p. 140);

PAR M. NEUBERG,

Professeur à l'Athenee royal de Bruges (Belgique).

Une conique étant inscrite dans un triangle, soient respectivement α, β, γ *les rayons de courbure de la conique aux points où elle touche les côtés* a, b, c *du triangle, on a*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 8S = &\left(-\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}}+\frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}}+\frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}}-\frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}}+\frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\\ &\times\left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}}+\frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}}-\frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right),\end{aligned}\right.$$

S *désignant l'aire du triangle.* (FAURE.)

(*) M. Mention a donné dans les *Nouvelles Annales*, t. XX, p. 302, une solution de la même question, où il dit : « Je ne sais pas comment en dehors du procédé de relations métriques qui a manifestement conduit l'auteur à ce theorème, on éviterait d'inextricables calculs, sans le cercle focal. »

I. — Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des sommets du triangle ABC circonscrit à l'ellipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0$. En appelant $2S_1$, $2S_2$, $2S_3$ les déterminants

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

on aura

$$(2) \quad A^2B^2 = \frac{1}{S}(-S_1 + S_2 + S_3)(S_1 - S_2 + S_3)(S_1 + S_2 - S_3) \text{ (*)}.$$

D'un autre côté, si x', y' sont les coordonnées du point de contact de la droite AB, celle-ci pourra être représentée par l'une ou l'autre des équations

$$\frac{xx'}{A^2} + \frac{yy'}{B^2} - 1 = 0,$$

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + 2S_3 = 0,$$

d'où, en identifiant,

$$\frac{x'}{A^2} = -\frac{y_1 - y_2}{2S_3}, \quad \frac{y'}{B^2} = \frac{x_1 - x_2}{2S_3}.$$

Portons ces valeurs dans l'expression du rayon de courbure γ mise sous la forme

$$\gamma = A^2B^2\left(\frac{x'^2}{A^4} + \frac{y'^2}{B^4}\right)^{\frac{3}{2}},$$

et nous aurons

$$\gamma = \frac{A^2B^2c^3}{8S_3^3}, \quad \text{d'où} \quad S_3 = (AB)^{\frac{2}{3}}\frac{c}{2\gamma^{\frac{1}{3}}},$$

(*) Voir 2e série, t. V, p. 514.

et par analogie on conclut

$$(3)\qquad S_1 = (AB)^{\frac{2}{3}} \frac{a}{2\alpha^{\frac{1}{3}}}, \quad S_2 = (AB)^{\frac{2}{3}} \frac{b}{2\beta^{\frac{1}{3}}}.$$

En remplaçant S_1, S_2, S_3 par ces valeurs dans les égalités (2) et $S = S_1 + S_2 + S_3$, on aura la formule (1) de M. Faure et la suivante :

$$(4)\qquad 2S = (AB)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}} \right).$$

Il convient de faire une remarque *essentielle* relativement aux formules (1) et (4). Les quantités S_1, S_2, S_3 représentent, aux signes près, les surfaces des triangles OBC, OCA, OAB.

Si la conique touche les côtés intérieurement, on a

$$ABC = OBC + OCA + OAB,$$

et en comparant à l'égalité $S = S_1 + S_2 + S_3$, on voit que S_1, S_2, S_3 sont positifs. Mais si la courbe touche, par exemple, le côté AB intérieurement et les deux autres extérieurement, comme on a alors

$$ABC = OBC + OCA - OAB,$$

il faut considérer S_1 et S_2 comme positifs et S_3 comme négatif et partant, dans les formules (3), α et β comme positifs et γ comme négatif, afin que les deux membres de ces formules soient de même signe. On en conclut que les relations (1) et (4) sont celles qui conviennent à une ellipse tangente intérieurement au triangle ABC, et pour les appliquer aux ellipses ex-inscrites, il y faut changer le signe de celui des trois quotients $\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}$ qui correspond au côté touché intérieurement.

On voit sans peine comment les calculs précédents peuvent s'appliquer aux hyperboles tangentes aux trois côtés du triangle ABC.

II. — Les égalités (1) et (4) peuvent encore se démontrer très-élégamment dans le cas de l'ellipse, en la projetant suivant un cercle qui a pour rayon le demi-petit axe B. Le triangle ABC se projette alors suivant un triangle MNP circonscrit au cercle. En supposant les trois contacts intérieurs et en appelant S′ la surface de MNP, on aura

$$16 S'^2 = (m+n+p)(-m+n+p)(m-n+p)(m+n-p),$$

$$(5) \qquad 2S' = (m+n+p)B,$$

et en divisant la première équation par la deuxième

$$(6) \qquad 8S' = \frac{1}{B}(-m+n+p)(m-n+p)(m+n-p).$$

Soient $2a'$, $2b'$, $2c'$ les longueurs des diamètres de l'ellipse parallèle aux côtés a, b, c et qui se projettent suivant des diamètres du cercle. Comme des droites parallèles sont proportionnelles à leurs projections sur un même plan, on aura

$$\frac{a}{a'} = \frac{m}{B}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{n}{B}, \quad \frac{c}{c'} = \frac{p}{B}.$$

Mais on a aussi

$$\alpha = \frac{a'^3}{AB}, \quad \beta = \frac{b'^3}{AB}, \quad \gamma = \frac{c'^3}{AB};$$

d'où

$$m = \frac{aB}{a'} = \frac{aB}{\alpha^{\frac{1}{3}}(AB)^{\frac{1}{3}}},$$

$$n = \frac{bB}{\beta^{\frac{1}{3}}(AB)^{\frac{1}{3}}},$$

$$p = \frac{cB}{\gamma^{\frac{1}{3}}(AB)^{\frac{1}{3}}}.$$

Les surfaces du triangle ABC et de l'ellipse étant proportionnelles à leurs projections, on a

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi AB}{\pi B^2} \quad \text{ou} \quad S' = \frac{BS}{A}.$$

Les valeurs de m, n, p, S', portées dans les formules (5) et (6), conduisent aux relations (4) et (1) (*).

III. — En supposant le triangle ABC circonscrit à la parabole $y^2 - 2px = 0$, on a

$$(7) \qquad p = \frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_1 - y_3)}{S}.$$

En identifiant les deux équations du côté AB

$$yy' - p(x + x') = 0,$$
$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + 2S_3 = 0,$$

il vient

$$y' = p\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}, \quad x' = \frac{2S_3}{y_1 - y_2},$$

et comme

$$\gamma = \frac{(p^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

on aura

$$\gamma = p\frac{[(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2]^{\frac{3}{2}}}{(y_1 - y_2)^3} = \pm\frac{pc^3}{(y_1 - y_2)^3},$$

ou

$$y_1 - y_2 = \pm p^{\frac{1}{3}}\frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}},$$

(*) Un raisonnement analogue peut servir à démontrer le théorème de Mac-Cullagh. Voir *Nouvelles Annales*, 1re série, t. IX, p. 298.

et de même

$$y_2 - y_3 = \pm p^{\frac{1}{3}} \frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}},$$

$$y_3 - y_1 = \pm p^{\frac{1}{3}} \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}}.$$

La somme $(y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) + (y_3 - y_1)$ étant nulle, on peut considérer deux de ces binômes comme positifs, et le troisième comme négatif, ce qui donne,

$$(8) \qquad \frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} = \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}},$$

et l'on a de plus, en vertu de l'égalité (7),

$$(9) \qquad S = \frac{abc}{\alpha^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} \gamma^{\frac{1}{3}}},$$

ou, R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC,

$$4R = \alpha^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} \gamma^{\frac{1}{3}}.$$

On peut aussi vérifier facilement qu'on a encore la formule

$$8S = \left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} - \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right).$$

Car, en vertu de l'équation (8), les trois facteurs du second membre se réduisent à $\frac{2a}{\alpha^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{2c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{2b}{\beta^{\frac{1}{3}}}$, et leur produit sera $\frac{8abc}{\alpha^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} \gamma^{\frac{1}{3}}}$ ou, en vertu de la relation (9), 8S.

Question 965

(voir 2e série, t VIII, p. 560);

PAR M. C. CHADU,
Maître auxiliaire au lycée de Bordeaux.

Étant donnés deux points fixes A *et* B *situés sur une ellipse, si l'on joint un point quelconque* M *de cette courbe aux deux points fixes, les perpendiculaires élevées sur les milieux des cordes* MA *et* MB *interceptent sur chacun des axes un segment dont la longueur est constante, quelle que soit la position du point sur la courbe.* (LAGUERRE.)

Menons les normales aux trois points A, B, M; soient α, β, μ les points de rencontre de ces normales avec le grand axe (*).

D'après une proposition démontrée, la perpendiculaire Pp élevée sur le milieu de MB passe par le milieu p de MB; de même la perpendiculaire Qq élevée sur le milieu de AM passe par le milieu q de $\mu\alpha$.

Nous aurons donc

$$pq = \frac{\mu\alpha + \mu\beta}{2} = \frac{\alpha\beta}{2},$$

quantité constante quel que soit le point M, puisque les deux points A et B sont fixes.

Note I. — M. Chadu, qui déduit la solution précédente de la question 955, nous fait remarquer qu'on pourrait, de la question 956, déduire pour l'ellipsoïde un théorème analogue au précédent.

Note II. — La question 955 a été résolue aussi par MM. Cerruti Valentino, étudiant à Turin; Humbert,

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

élève au lycée de Metz; Émile Laclais et Alphonse Fould;

M. Cerruti fait observer que les longueurs constantes interceptées sur les axes sont représentées par

$$\frac{1}{2} e^2 (x' - x''), \quad \frac{1}{2} e'^2 (y' - y''),$$

e et e' étant les excentricités réelle et imaginaire de la courbe;

M. Humbert étend le théorème à l'hyperbole;

M. Laclais fait remarquer que la propriété considérée est caractéristique des courbes du second degré;

Enfin, d'après M. Fould, la proposition ne s'étend pas à un ellipsoïde quelconque; mais on a, pour l'ellipsoïde de révolution, le théorème suivant :

« Si l'on prend, sur un ellipsoïde de révolution, deux points fixes A et B et un point variable M, les plans perpendiculaires aux milieux des droites MA, MB interceptent sur l'axe de révolution un segment de longueur constante. »