Nouvelles annales de mathématiques

L. Béziat

Solutions de quelques problèmes célèbres par la méthode des équipollences du professeur Giusto Bellavitis

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 124-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__124_1>

SOLUTIONS DE QUELQUES PROBLÈMES CÉLÈBRES

Par la Méthode des Équipollences du Professeur Giusto Bellavitis;

PAR M. L. BÉZIAT.

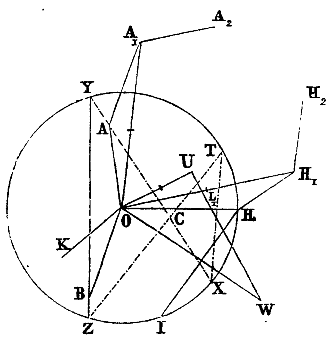
I.

Un problème qui a marqué en quelque sorte les progrès successifs de la Géométrie est celui d'inscrire dans un cercle un triangle dont les côtés passent par trois points donnés; les anciens n'ont pu le résoudre que dans le cas particulier où les trois points donnés sont en ligne droite; pendant plus de trente années le problème général fut tenté par les plus remarquables géomètres; enfin, en 1776, Lagrange en donna une solution algébrique, et Castillon une géométrique; il fut ensuite généralisé par un jeune géomètre, Giordano da Ollajano, qui commença à Naples l'illustre école des imitateurs et des continuateurs de l'ancienne Géométrie; les méthodes modernes ouvrirent de nouvelles voies à la résolution du problème, et la Géométrie nouvelle le ramena à des principes généraux applicables encore aux sections coniques; par la méthode des équipollences, la solution se présente immédiatement. Nous allons résoudre le problème sous cette forme générale :

Inscrire dans un cercle un polygone XYZ *dont les côtés passent par des points donnés ou aient des longueurs données.*

Prenons le cas particulier où dans le cercle de centre O

Fig. 1.



on doit inscrire un quadrilatère XYZT, dont trois côtés XY, YZ, ZT passent respectivement par les points

A, B, C, et dont le quatrième côté TX ait une longueur donnée. Soit OH le rayon d'inclinaison nulle, et posons

$$\mathrm{OX} = \varepsilon^x.\mathrm{OH},\quad \mathrm{OY} = \varepsilon^y.\mathrm{OH},\quad \mathrm{OZ} = \varepsilon^z.\mathrm{OH},\quad \mathrm{OT} = \varepsilon^t.\mathrm{OH}\ (*);$$

AXY devant être une ligne droite, cette condition est exprimée par l'équipollence

$$\varepsilon^x.\mathrm{OH} - \mathrm{OA} = n(\varepsilon^y.\mathrm{OH} - \mathrm{OA});$$

entre cette équipollence et sa conjuguée, nous éliminerons n et nous aurons

$$\begin{aligned}(\varepsilon^x.\mathrm{OH} - \mathrm{OA})(\varepsilon^{-y}.\mathrm{OH} - \mathrm{cj}.\mathrm{OA})\\ = (\varepsilon^{-x}.\mathrm{OH} - \mathrm{cj}.\mathrm{OA})(\varepsilon^y.\mathrm{OH} - \mathrm{OA}).\end{aligned}$$

Cette équipollence, il était du reste facile de le prévoir, devient identique pour $x = y$, on peut donc la diviser par $\varepsilon^x - \varepsilon^y$; après quoi nous aurons entre les inclinaisons x et y la relation

$$(1)\qquad \varepsilon^x = \frac{\mathrm{OA} - \varepsilon^y.\mathrm{OH}}{\mathrm{OH} - \varepsilon^y.\mathrm{cj}.\mathrm{OA}}.$$

Les côtés YZ, ZT passant par les points B, C donnent les relations analogues

$$(2)\qquad \varepsilon^y = \frac{\mathrm{OB} - \varepsilon^z.\mathrm{OH}}{\mathrm{OH} - \varepsilon^z.\mathrm{cj}.\mathrm{OB}},$$

$$(3)\qquad \varepsilon^z = \frac{\mathrm{OC} - \varepsilon^t.\mathrm{OH}}{\mathrm{OH} - \varepsilon^t.\mathrm{cj}.\mathrm{OC}};$$

enfin, en appelant δ l'arc donné TX, on aura

$$(4)\qquad \varepsilon^t = \varepsilon^{x-\delta}.$$

Portant ces équipollences les unes dans les autres, nous obtiendrons l'équipollence trinôme qui nous apprendra

(*) $\varepsilon = e^{\sqrt{-1}} = e^{\iota}$. (*Note du Rédacteur.*)

à déterminer l'inclinaison inconnue x et par conséquent la position du sommet X. Nous allons construire à mesure les coefficients des équipollences successives, et on continuerait de la sorte si le polygone avait un plus grand nombre de côtés. La valeur (2) substituée dans (1) donne ε^x exprimée par une équipollence, qui, en posant

(5) $$\mathrm{AA_1} \doteq -\mathrm{OB}, \quad \mathrm{HH_1} \doteq -\frac{\mathrm{OA.cj.OB}}{\mathrm{OH}},$$

se réduit facilement à

$$\varepsilon^x \doteq \frac{\mathrm{OA_1} + \varepsilon^x.\mathrm{OH_1}}{\mathrm{cj.OH_1} + \varepsilon^x\,\mathrm{cj.OA}},$$

et en substituant (3) dans cette dernière, on obtient

$$\varepsilon^x \doteq \frac{\mathrm{OA_2} - \varepsilon^t.\mathrm{OH_2}}{\mathrm{cj.OH_2} - \varepsilon^t\,\mathrm{cj.OA_2}},$$

pourvu qu'on ait eu le soin de poser

(6) $$\mathrm{A_1A_2} \doteq \frac{\mathrm{OH_1.OC}}{\mathrm{OH}}, \quad \mathrm{H_1H_2} \doteq \frac{\mathrm{OA.cj.OC}}{\mathrm{OH}}:$$

enfin en substituant (4) on obtient

$$\varepsilon^{2x-\delta}.\mathrm{cj.OA_2} - \varepsilon^x.\mathrm{cj.OH_2} - \varepsilon^{x-\delta}.\mathrm{OH_2} + \mathrm{OA_2} \doteq 0,$$

qui devient

$$\varepsilon^x.\mathrm{OH} + \varepsilon^{\delta-x}.\mathrm{OH}.\frac{\mathrm{OA_2}}{\mathrm{cj.OA_2}} \doteq \mathrm{OU},$$

en posant

(7) $$\mathrm{OW} \doteq \mathrm{OH_2} + \varepsilon^\delta.\mathrm{cj.OH_2}, \quad \mathrm{OU} \doteq \frac{\mathrm{OH.OW}}{\mathrm{cj.OA_2}}.$$

La dernière, comparée à l'équipollence identique

$$\mathrm{OX} + \mathrm{XU} \doteq \mathrm{OU},$$

nous montre que le point X s'obtiendra en coupant le cercle donné par un autre cercle égal ayant son centre en U. Les équipollences (5), (6), (7) indiquent clairement les constructions à effectuer. On tire $\mathrm{AA_1}$ équipollente à BO, on construit le triangle OAK inversement semblable à OHB, et on tire

$$HH_1 = KO;$$

on forme le triangle OH_1L_1 directement semblable à OHC et OA_1K_1 inversement semblable au même triangle OHC, et on tire

$$A_1A_2 = OL_1, \quad H_1H_2 = OK_1;$$

prenons ensuite la corde HI égale au côté donné TX, on mène OW perpendiculaire sur HI et ayant par conséquent une inclinaison égale à $\frac{1}{2}\delta$, et on coupe cette ligne, de sorte que H_2W égale H_2O; enfin, construisant OWU inversement semblable à OA_2H, la droite perpendiculaire sur le milieu de OU coupera le cercle donné au sommet demandé X. La direction du rayon OH est arbitraire; en prenant ce rayon sur la direction de OC, les triangles OHC, OH_1L_1, OA_1K_1 se réduisent à trois droites coupées dans de certains rapports.

Cette méthode a encore l'avantage d'indiquer les calculs qu'il faudrait effectuer pour déterminer numériquement la position du sommet X. Les deux solutions se réduisent à une seule quand OU est double du rayon du cercle, c'est-à-dire quand la direction de OW est telle, que la projection de OH_2 sur OW égale OA_2. Dans ce cas, le côté ZT est le plus grand entre tous ceux des quadrilatères inscrits dans le cercle et dont trois côtés passent par les points A, B, C.

II.

Circonscrire à un cercle un polygone dont les sommets soient situés sur des droites données ou aient des angles de grandeurs données.

Cherchons, avant de résoudre le problème, quelle est la condition pour que les perpendiculaires aux extrémités des droites OA′, OB′, OC′ se rencontrent en un même point M. Nous avons

$$\mathrm{OM} = \mathrm{OA}' + \mathrm{A'M} = (1 + li)\,\mathrm{OA}' = (1 + mi)\,\mathrm{OB}' = (1 + ni)\,\mathrm{OC}';$$

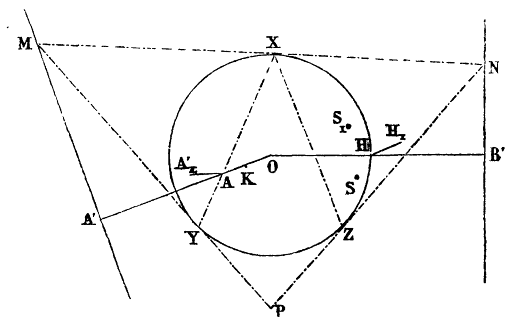
entre ces équipollences et leurs conjuguées, on élimine l, m, n et on trouve que la condition cherchée est exprimée par la fonction alternée ou déterminant

$$\begin{aligned} &\mathrm{OA}'.\,\mathrm{cj}.\,\mathrm{OA}'(\mathrm{OB}'.\,\mathrm{cj}.\,\mathrm{OC}' - \mathrm{OC}'.\,\mathrm{cj}.\,\mathrm{OB}') \\ +\, &\mathrm{OB}'.\,\mathrm{cj}.\,\mathrm{OB}'(\mathrm{OC}'.\,\mathrm{cj}.\,\mathrm{OA}' - \mathrm{OA}'.\,\mathrm{cj}.\,\mathrm{OC}') \\ +\, &\mathrm{OC}'.\,\mathrm{cj}.\,\mathrm{OC}'(\mathrm{OA}'.\,\mathrm{cj}.\,\mathrm{OB}' - \mathrm{OB}'.\,\mathrm{cj}.\,\mathrm{OA}') = 0. \end{aligned}$$

Arrivons maintenant au problème qui est le corrélatif du précédent.

Supposons qu'on ait à circonscrire au cercle un triangle MNP ayant les sommets M et N sur deux droites données et l'angle en P donné.

Fig. 2.



Les droites seront convenablement définies au moyen des perpendiculaires OA′, OB′ abaissées du centre O du cercle donné, et les points de contact du triangle circonscrit sont exprimés par

$$OX = \varepsilon^{x}.OH,$$
$$OY = \varepsilon^{y}.OH,$$

OH étant le rayon pris pour origine des inclinaisons. Pour que les trois perpendiculaires élevées sur OA′, OX, OY se rencontrent au même point M, il faut qu'on ait, comme nous venons de le voir,

$$\begin{aligned} &OA'.\mathrm{cj}.OA'(\varepsilon^{x-y} - \varepsilon^{y+x}) \\ &\quad + OH(\varepsilon^{y}.\mathrm{cj}.OA' - \varepsilon^{-y}.OA' + \varepsilon^{-x}.OA' - \varepsilon^{x}.OA') = 0; \end{aligned}$$

elle devient identique pour $x = y$; divisée par $\varepsilon^{x} - \varepsilon^{y}$, ensuite résolue, elle donne

$$\varepsilon^{x} = \frac{OH.OA' - \varepsilon^{y}.OA'.\mathrm{cj}.OA'}{OA'.\mathrm{cj}.OA' - \varepsilon^{y}.OH.\mathrm{cj}.OA'},$$

qu'on rend identique à l'equipollence (1) du problème précédent, quand on y fait

$$OA = \frac{\overline{OH}^{2}}{\mathrm{cj}.OA'}.$$

Ainsi la condition que les tangentes en X et en Y se rencontrent en un point de la droite A′M revient à la suivante : que la corde XY passe par le point A situé sur OA′ de telle sorte que OA.OA′ égale le carré du rayon, ou, en d'autres termes, que la corde XY passe par le pôle de A′M relativement au cercle O. Déterminant de la même manière le point B sur OB′, le problème sera ramené au précédent.

Si, par exemple, le triangle MNP circonscrit au cercle devait avoir deux sommets sur les droites A′M, B′N et l'angle en P *maximum*, nous déterminerions comme ci-dessus les pôles A, B des deux droites, et menant le rayon OBH, nous couperions OA en K dans le même rapport que OH est coupé en B. Après quoi, nous tirerions

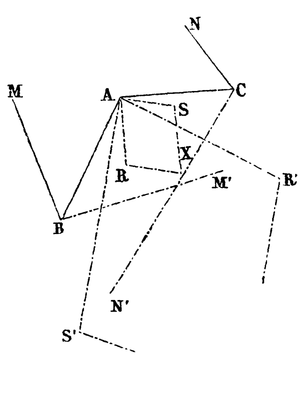
$$AA_1 = BO, \quad HH_1 = KO,$$

et, donnant à OS une direction telle, que la projection sur cette droite de OH_1 soit égale OA_1, nous formerions l'angle SOX égal à HOA_1. Il y a deux solutions de *maximum* dépendant des deux positions que peut prendre OS suivant OS et OS_1.

III.

Étant donnés trois points A, B, C, *trouver la base commune des trois triangles* AXY, BXY, CXY, *connaissant les différences de leurs angles au sommet* A, B, C

Fig. 3.



et aussi les rapports des quotients de leurs côtés $\frac{AX}{AY}$, $\frac{BX}{BY}$, $\frac{CX}{CY}$.

Lagrange, en cherchant (*Mémoires de l'Académie de Berlin pour* 1779, p. 201) les pôles d'une projection stéréographique, connaissant les projections de trois points dont on donne les latitudes et les longitudes, se trouva amené au problème que nous venons d'énoncer, et dit : *Il me paraît assez difficile à résoudre par la Géométrie, et quant à la solution algébrique, je ne l'ai pas tentée, parce qu'il me semble qu'elle ne serait d'aucun usage, à moins qu'on ne pût la ramener ensuite à une construction aisée.*

La méthode des équipollences en offre une solution tout à fait directe et très-simple.

Les conditions du problème sont exprimées par les deux équipollences

$$\frac{AX.BY}{AY.BX} = \frac{CN}{CA},$$

$$\frac{AX.CY}{AY.CX} = \frac{BM}{BA},$$

pourvu qu'on ait

$$\text{ang}\,ACN = \text{ang}\,YAX - \text{ang}\,YBX$$

et que le rapport $\frac{CN}{CA}$ égale le quotient donné de $\frac{AX}{AY}$ par $\frac{BX}{BY}$. On en dirait de même de BM. Par le premier principe toutes les droites inconnues se réduisent aux deux AO, AY, et il est ensuite facile d'éliminer cette dernière et d'obtenir la solution

$$AX = \frac{AC.MB + AB.CN}{MN} = AR + AS,$$

en faisant

$$\frac{AC.MB}{MN} = AR, \quad \frac{AB.CN}{MN} = AS.$$

On construira donc les triangles ACR, ABS directement semblables à MNB, NMC, et on aura

$$SX = AR$$

On pourra de la même manière déterminer Y ; il faudra pour cela substituer aux rapports $\frac{CN}{CA}$, $\frac{BM}{BA}$ leurs équipollents $\frac{CA}{CN'}$, $\frac{BA}{BM'}$, pour pouvoir éliminer X avec la même facilité que Y. On trouvera ainsi

$$AY \doteq AR' + AS',$$

AR′ et AS′ étant donnés par

$$AR' \doteq \frac{AC.M'B}{M'N'}, \quad AS' \doteq \frac{AB\ N'C}{N'M'},$$

qui donnent

$$AR.AR' \doteq AS.AS'.$$

IV.

Question 874.

On donne un cercle et deux points. Inscrire dans le cercle un triangle isoscèle dont les deux côtés égaux passent par les deux points donnés. (Lemoine.)

C'est là le vieux problème du billard circulaire déjà résolu par l'Arabe Abhasen et par d'autres géomètres, principalement par Simpson (*Sect. conicarum, libri V : Appendix,* p. 223), Chasles (*Aperçu historique...*); dans les *Institut. analyticæ* de Riccati et Saladini, on en donne la solution au moyen d'une hyperbole équilatère; *voyez* aussi Paoli, Bigoni, Puissant, Quetelet, etc.

Si X est le point d'incidence, c'est-à-dire le sommet du triangle isoscèle, le rayon $OX \doteq r i^x$ devant être également incliné sur les droites

$$AX \doteq ri^x - OA, \quad BX \doteq ri^x - OB,$$

nous aurons l'équipollence

$$r^2 i^{2x} \doteq m(ri^x - OA)(ri^x - OB).$$

Au moyen de sa conjuguée

$$r^2 i^{-2x} = m(ri^{-x} - \mathrm{cj.OA})(ri^{-x} - \mathrm{cj.OB}),$$

on élimine m, et en posant

$$\mathrm{OA} + \mathrm{OB} = \mathrm{OS},$$

on obtient

$$(1)\quad \mathrm{cj.OA.cj.OB}\,i^{4x} - r.\mathrm{cj.OS}.i^{3x} + r.\mathrm{OS}.i^{x} - \mathrm{OA.OB} = 0;$$

le problème étant du quatrième degré ne peut se résoudre géométriquement.

Si un côté du triangle isoscèle inscrit dans le cercle devait passer par le point P et l'autre avoir une inclinaison nulle, nous arriverions de la même manière à l'équipollence

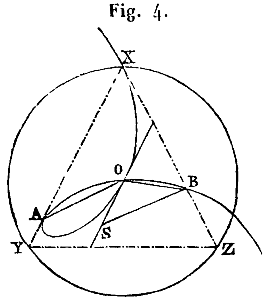
$$(2)\qquad \mathrm{cj.OP}.i^{4x} - r.i^{3x} + ri^{x} - \mathrm{OP} \doteq 0,$$

qui est identique à l'équipollence (1) quand OS est la droite d'inclinaison nulle, et qu'on a

$$\mathrm{OP} = \frac{\mathrm{OA.OB}}{\mathrm{OS}}.$$

Nous mènerons donc AS équipollente à OB, puis nous construirons le triangle OBP directement semblable

Fig. 4.



à OSA, le problème se réduira à trouver sur le cercle donné le point X, tel que, en le joignant à P, la droite PX soit coupée par OS en L, de façon à ce que le triangle OLX soit isoscèle; les solutions du problème sont les intersections du cercle avec la courbe que nous construirons de la manière suivante. Sur chaque droite PMLX menée par le point P, on prend de part et d'autre de son point de rencontre L avec OS, les distances LM, LX égales à LO, et la courbe XOPMAOB ainsi construite coupera le cercle de centre O, en deux ou quatre points qui seront les points cherchés.

La courbe est du genre des courbes à boucle. Dans le cas particulier où OP serait perpendiculaire à OS, la courbe est l'inverse de l'hyperbole équilatère relativement à son sommet, elle est dite encore *folium, strophoïde logocyclique*.

En appelant $2x$ l'inclinaison de PM sur OS, l'équipollence de la courbe est

$$\mathrm{PM} = (\operatorname{tang} x + c)\,\varepsilon^{2x},$$

en posant

$$\mathrm{PO} = i + c.$$

Le point C de la courbe correspondant à $x = 0$ est donné par la relation

$$\mathrm{PC} = c;$$

PH rencontre encore la courbe en deux points D, D′ donnés par

$$\mathrm{PD} = (1 \pm c)\,i,$$

et ainsi l'angle DOD′ est égal à 90 degrés. L'asymptote passe par le point K qu'on obtient en prenant

$$\mathrm{PK} = 2\,\mathrm{PH}$$

et est parallèle à OS. Comme

$$\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{OB} = \mathrm{OP}\,.\,\mathrm{OS},$$

si l'on prend arbitrairement sur OHS un point R et qu'on fasse

$$OQ = 2\,OP,$$

la droite $RA = \sqrt{RO.RQ}$, bissectrice de l'angle ORQ et moyenne proportionnelle entre RO et RQ, détermine sur la courbe deux points A et B, $RB = -RA$, pour lesquels on a

$$\text{ang}\,AMO = \text{ang}\,OMB,$$

quel que soit le point M de la courbe.