Nouvelles annales de mathématiques

Note relative à quelques cas de convergence ou de divergence des séries

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 107-113

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__107_1>

NOTE RELATIVE A QUELQUES CAS DE CONVERGENCE OU DE DIVERGENCE DES SÉRIES.

PAR UN ABONNÉ.

1. Soit la série

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

dont les termes sont positifs et tendent vers la limite o à mesure que n augmente. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ayant été mis sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, *la série est convergente quand* *lim. $n\alpha$ est supérieure à* 1; *elle est divergente quand lim. $n\alpha$ est inférieure à* 1.

On peut donner de ce théorème bien connu la démonstration suivante :

1° Si lim. $n\alpha > 1$, il sera toujours possible d'assigner un nombre m compris entre 1 et la limite, tel qu'à partir d'une valeur suffisamment grande, mais finie, de n, l'on ait $n\alpha > m$ ou $\alpha > \frac{m}{n}$, et par conséquent

$$1 + \alpha > 1 + \frac{m}{n}.$$

Cela posé, soit $\frac{p}{q}$ une fraction à numérateur et à dénominateur entiers, telle que

$$1 < \frac{p}{q} < m,$$

on pourra toujours écrire

$$1 + \frac{m}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

En effet, cette inégalité revient à la suivante :

$$n^{p-q}(n+m)^q > (n+1)^p,$$

ou, en réduisant,

$$n^{p-1}(mq - p) + \ldots > 0.$$

Or, $mq - p$ étant positif, on pourra toujours donner à n une valeur assez grande pour que le polynôme composant le premier membre de la précédente inégalité soit positif.

S'il en est ainsi, l'on aura

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}},$$

d'où

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n^{\frac{p}{q}}}{(n+1)^{\frac{p}{q}}}.$$

Donc, les termes de la série (1) décroissent plus rapidement que ceux de la série

$$\frac{1}{n^{\frac{p}{q}}} + \frac{1}{(n+1)^{\frac{p}{q}}} + \frac{1}{(n+2)^{\frac{p}{q}}} + \ldots,$$

et l'on sait que cette dernière série est convergente quand $\frac{p}{q} > 1$.

2° Si lim. $n\alpha < 1$, on pourra toujours trouver un nombre m compris entre 1 et cette limite, et auquel $n\alpha$ sera certainement inférieur. De sorte que, pour des valeurs suffisamment grandes, mais finies de n, on aura

$$n\alpha < m \quad \text{ou} \quad \alpha < \frac{m}{n},$$

et par conséquent

$$1 + \alpha < 1 + \frac{m}{n}.$$

Soit $\frac{p}{q}$ une fraction à numérateur et à dénominateur entiers telle, que l'on ait

$$m < \frac{p}{q} < 1,$$

on pourra écrire

$$1 + \frac{m}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}};$$

en effet, cette inégalité revient à la suivante :

$$(n+m)^q < (n+1)^p\, n^{q-p},$$

ou, en réduisant,

$$n^{q-1}(p - mq) + \ldots > 0,$$

inégalité toujours vérifiée pour une valeur suffisamment grande de n, puisque $p - mq$ est positif; donc

$$1 + \alpha < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}},$$

et par conséquent

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n^{\frac{p}{q}}}{(n+1)^{\frac{p}{q}}}.$$

Les termes de la série (1) croissent plus rapidement que ceux de la série

$$\frac{1}{n^{\frac{p}{q}}} + \frac{1}{(n+1)^{\frac{p}{q}}} + \frac{1}{(n+2)^{\frac{p}{q}}} + \ldots,$$

que l'on sait être divergente, puisque $\frac{p}{q}$ est moindre que 1.

Le théorème énoncé est donc démontré.

2. Il reste à examiner les cas où $\lim. n\alpha = 1$.

Dans ce cas, α peut être mis sous la forme

$$\alpha = \frac{1}{n}[1 + \varphi(n)],$$

$\varphi(n)$ ayant pour limite 0.

Soit k la limite de $n\varphi(n)$ et L un nombre supérieur à k, à partir d'une valeur suffisamment grande de n, on aura toujours

$$n\varphi(n) < \mathrm{L} \quad \text{ou} \quad \varphi(n) < \frac{\mathrm{L}}{n},$$

d'où

$$\alpha < \frac{1}{n} + \frac{\mathrm{L}}{n^2},$$

et

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{L}{n^2}} > \frac{n^2}{n^2+n+L}.$$

Or on peut toujours déterminer un nombre i tel, que l'on ait

$$\frac{n^2}{n^2+n+L} > \frac{n-i}{n-i+1};$$

il suffit pour cela de vérifier l'inégalité

$$n(L-i) - Pi < 0,$$

laquelle a toujours lieu si $L < i$.

Donc, à partir d'un certain rang, les termes de la série (1) croîtront plus rapidement que ceux de la série

$$\frac{1}{n-i} + \frac{1}{n-i+1} + \frac{1}{n-i+2} + \ldots;$$

et, puisque cette dernière série est divergente, la série (1) le sera.

Il ne peut y avoir de doute que si $n\varphi(n)$ est infini à la limite.

3. *Règle de Gauss*. — La question a été traitée par M. Bertrand dans son *Traité de calcul différentiel*, p. 240, par M. Rouché, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V, p. 10. et par M. Brisse, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IX, p. 36.

La règle donnée par Gauss est la suivante : *Le rapport de deux termes consécutifs étant sous la forme de fraction rationnelle*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \ldots},$$

la série sera convergente si

$$a - A + 1 < 0;$$

la série sera divergente si

$$a - A + 1 > 0;$$

la série sera divergente si

$$a - A + 1 = 0.$$

En effet,

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{A-a}{n} + \ldots + \frac{Kn^{\lambda-2} + Ln^{\lambda-3} + \ldots}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots}}.$$

On voit que lim. $n\alpha = A - a$, et en appliquant les théorèmes précédents on arrive à la règle énoncée plus haut.

Faisons observer que, dans le cas où $A - a = 1$, $n\varphi(n)$ a pour limite 0, et le principe du n° 2 est applicable.

Dans son *Traité de Calcul différentiel et intégral*, p. 178, M. J.-A. Serret examine ce que devient la série du binôme

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{mx}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots. \end{array} \right.$$

quand on fait $x = \pm 1$.

Avec ce qui a été dit, la discussion est des plus faciles.

Soit d'abord m positif. La valeur absolue du rapport de deux termes consécutifs peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{1}{1 + \frac{1+m}{n-m}}.$$

Tant que m est positif, lim. $n\alpha$ est supérieure à 1. La série (2) est convergente pour $x = -1$, et *à fortiori* pour

$x = +1$; car si, dans le premier cas, les termes, à partir d'un certain rang, sont tous de même signe, ils sont alternativement positifs et négatifs dans le second.

Si m est négatif,

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{1 + \dfrac{1-m}{n+m}};$$

si $m > 1$ en valeur absolue, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est plus grand que 1, et les termes vont en croissant à partir d'un certain rang; donc la série est divergente, non-seulement pour $x = -1$, mais aussi pour $x = 1$.

Si $m < 1$ en valeur absolue, on a toujours $\lim. n\alpha < 1$, et la série sera divergente pour $x = -1$; mais elle sera convergente pour $x = 1$, puisque les termes finissent par décroître indéfiniment et sont alternativement positifs et négatifs.