RETSIN

# Démonstrations nouvelles de deux théorèmes de géométrie

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 8 (1869), p. 530-533

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__530_1>

# DÉMONSTRATIONS NOUVELLES DE DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ;

PAR M. RETSIN,

Professeur de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Gand.

## I.

*Les projections, sur les côtés d'un triangle, d'un point quelconque* M *de la circonférence circonscrite sont situées sur une même droite qui divise en deux parties égales la droite menée du point* M *au point de concours* H *des hauteurs du triangle.*

1° Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (*fig.* 1) ces trois projections. Prolongeons la droite $M\alpha$ jusqu'à sa rencontre en N avec la circonférence, et menons la droite ANP.

En vertu des quadrilatères inscriptibles $M\alpha\beta C$, MNAC, on a

$$N\alpha\beta = MCA = 180^\circ - MNA.$$

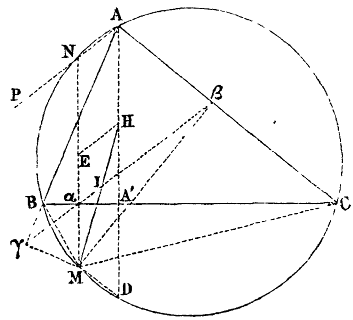
Donc $\alpha\beta$ est parallèle à la corde AN.

Le quadrilatère inscriptible $M\alpha B\gamma$ donne

$$M\alpha\gamma = MB\gamma = MNP,$$

car les deux derniers angles ont même mesure. Donc $\alpha\gamma$ est parallèle à AP, et les trois points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ se trouvent sur une même droite parallèle à AP.

Fig. 1.




2° Soit D le point où la hauteur AA' rencontre la circonférence circonscrite au triangle. Nous savons que $A'D = A'H$, si donc nous prenons $\alpha E = \alpha M$, le quadrilatère MEHD sera un trapèze isoscèle, et comme le trapèze MNAD est lui-même isoscèle, HE est parallèle à AN, donc aussi à $\alpha\beta$. Il résulte de là que la droite $\alpha\beta$ qui passe par le milieu $\alpha$ du côté ME, dans le triangle MEH, est parallèle à un second côté de ce triangle; elle passe donc par le milieu du troisième côté MH.

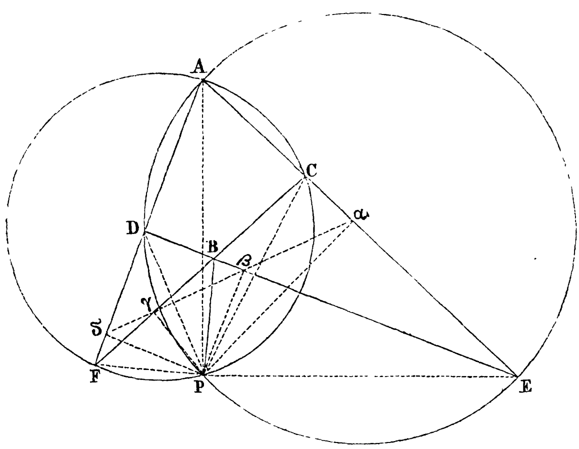
## II.

Quatre droites situées dans le même plan forment quatre triangles; dans chacun d'eux existe un point de rencontre des hauteurs; les quatre points de rencontre sont situés sur une même droite. (*Nouvelles Annales*, 1846, p. 13, et 1847, p. 196.)

*Lemme.* — Les circonférences de cercle circonscrites à ces quatre triangles passent par un même point.

Soient ECA, EBD, FDA, FBC (*fig.* 2) les quatre droites et P le second point d'intersection des circonférences circonscrites aux triangles ADE, ACF.

Fig. 2.




Les quadrilatères inscrits ADPE, ACPF donnent

$$DEP = DAP = FCP$$

et

$$CFP = CAP = EDP;$$

donc les quadrilatères BCEP, BDFP sont inscriptibles, et les circonférences circonscrites aux triangles BCE, BDF passent aussi par le point P.

Arrivant au théorème principal, nous remarquons que les projections $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ du point P sur les quatre droites données sont situées sur une même droite, car, prises trois à trois, elles sont les projections du point P sur les côtés des quatre triangles. Cette droite $\alpha\beta\gamma\delta$ divise en parties égales les quatre droites menées du point P aux points de rencontre des hauteurs dans les quatre triangles ; donc ces points de rencontre sont situés sur une même droite parallèle à $\alpha\beta\gamma\delta$.