NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HOUSEL

Homographie et perspective

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 492-515

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__492_1>

HOMOGRAPHIE ET PERSPECTIVE;

Par M. HOUSEL.

I. Nous nous proposons de démontrer par le calcul que, dans un plan et dans l'espace, deux figures homographiques sont deux figures perspectives dont on a changé la position sans altérer la forme. Pour cela, nous passerons par l'intermédiaire de l'homologie.

Quand il ne s'agit que de géométrie plane, on sait que deux figures homologiques reviennent à deux figures perspectives; ainsi nous avons seulement à comparer l'homographie à l'homologie.

Deux figures homographiques étant définies analytiquement par les relations connues

$$x = \frac{ax' + by' + c}{\alpha x' + \beta y' + 1}, \quad y = \frac{a'x' + b'y' + c'}{\alpha x' + \beta y' + 1},$$

il faut faire voir que l'on peut toujours, en déplaçant ces figures sans les déformer, les disposer de manière qu'elles soient homologiques, et trouver les éléments de l'homologie.

II. Pour cela, nous transporterons la première figure (x', y') parallèlement à elle-même, c'est-à-dire sans rotation, ce qui donne

$$x' = x_1 + \mathrm{A}, \quad y' = y_1 + \mathrm{B}.$$

Au contraire, nous ferons tourner l'autre, sans translation, d'un angle ω autour de l'origine. Comme les axes sont rectangulaires, on trouve

$$x = \xi \cos\omega - \eta \sin\omega = \frac{ax_1 + by_1 + a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c}{\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha \mathrm{A} + \beta \mathrm{B} + 1},$$
$$y = \xi \sin\omega + \eta \cos\omega = \frac{a'x_1 + b'y_1 + a'\mathrm{A} + b'\mathrm{B} + c'}{\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha \mathrm{A} + \beta \mathrm{B} + 1},$$

et l'on demande d'établir l'homologie entre les figures représentées par les coordonnées x_1 et y_1, ξ et η.

On posera donc

$$\frac{\xi - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{\eta - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{1}{lx_1 + my_1 + n},$$

ce qui donne, en prenant les expressions de ξ et de η,

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} x_1[\cos\omega(lx_0+1)-ly_0\sin\omega] \\ \quad +y_1[mx_0\cos\omega-\sin\omega(my_0+1)] \\ \quad +(n-1)(x_0\cos\omega-y_0\sin\omega) \end{array}\right\}}{lx_1+my_1+n}$$
$$=\frac{ax_1+by_1+aA+bB+c}{\alpha x_1+\beta y_1+\alpha A+\beta B+1}.$$

Pour identifier ces expressions, qui doivent donner un résultat du premier degré, il faut que les dénominateurs ne diffèrent que par un facteur constant. Donc

$$\frac{l}{\alpha}=\frac{m}{\beta}=\frac{n}{\alpha A+\beta B+1}.$$

Soit R la valeur commune de ces rapports, on a

$$l=\alpha R,\quad m=\beta R,\quad n=R(\alpha A+\beta B+1).$$

Alors, en identifiant de part et d'autre le coefficient de x_1, celui de y_1 et le terme indépendant, puis posant, pour abréger, $M=x_0\cos\omega-y_0\sin\omega$, on a

$$(1)\qquad Ra=\alpha RM+\cos\omega,$$

$$(2)\qquad Rb=\beta RM-\sin\omega,$$

et

$$R(aA+bB+c)=(n-1)M.$$

Mais ici il faut remplacer n par sa valeur

$$n=R(\alpha A+\beta B+1),$$

ce qui donne

$$R(aA+bB+c)=M(R\alpha A+R\beta B+R-1).$$

Or, comme

$$M\alpha A=Ra-\cos\omega,\quad M\beta B=Rb+\sin\omega,$$

on a

$$R(aA+bB+c)=A(Ra-\cos\omega)+B(Rb+\sin\omega)+M(R-1),$$

ou bien

$$(3)\qquad Rc=B\sin\omega-A\cos\omega+M(R-1).$$

La seconde égalité donnera les conditions

$$(4)\qquad Ra'=\alpha RN+\sin\omega,$$

$$(5)\qquad Rb'=\beta RN+\cos\omega,$$

et

$$(6)\qquad Rc'+B\cos\omega+A\sin\omega=N(R-1),$$

en posant $N=x_0\sin\omega+y_0\cos\omega$.

En effet, en passant de la première égalité à la seconde, on observe qu'il faut changer $\cos\omega$ en $\sin\omega$, et $\sin\omega$ en $-\cos\omega$; du reste $R=\dfrac{n}{\alpha A+\beta B+1}$ est le même de part et d'autre.

III. Entre (1) et (2), éliminons M, il vient

$$R(a\beta-b\alpha)=\alpha\sin\omega+\beta\cos\omega;$$

entre (3) et (4), éliminons N, on a

$$R(\alpha b'-a'\beta)=\alpha\cos\omega-\beta\sin\omega.$$

En divisant, on trouve

$$\operatorname{tang}\omega=\frac{\beta^2a'-\alpha^2b+\alpha\beta(a-b')}{\alpha^2b'+\beta^2a-\alpha\beta(a'+b)}.$$

Pour avoir R sans erreur de signe, observons que les deux équations entre lesquelles nous l'avons éliminé par division peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{R}{\cos\omega}(\alpha b' - a'\beta) = \alpha - \beta \operatorname{tang}\omega,$$

$$\frac{R}{\cos\omega}(a\beta - b\alpha) = \alpha \operatorname{tang}\omega + \beta.$$

Multiplions la première égalité par α, la seconde par β et ajoutons, il vient

$$\frac{R}{\cos\omega}[\alpha^2 b' + \beta^2 a - \alpha\beta(b + a')] = \alpha^2 + \beta^2.$$

Comme $\cos\omega$ est toujours positif, quel que soit le sens où l'on tourne, on a ainsi le signe de R. Du reste, comme la valeur absolue de $\cos\omega$ est $\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\omega}$, on a aussi la valeur cherchée de R.

Connaissant R et ω, l'une des équations (1) et (2) donnera M; on aura de même N. Donc, connaissant M, N et ω, on aura x_0 et y_0.

Enfin, les équations (3) et (6) ne contenant plus de quantités inconnues que A et B, on les obtient aussi par des équations du premier degré.

IV. Passons maintenant aux trois dimensions; pour cela, nous commencerons par rappeler la liaison entre *l'homologie et la perspective dans l'espace.*

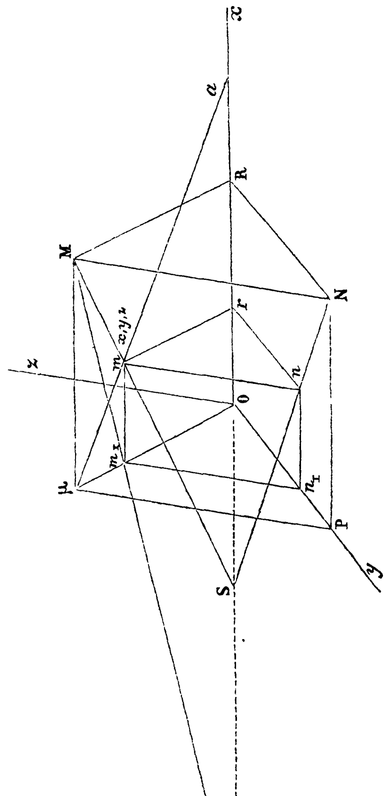
Les formules de l'homologie étant, comme on le sait,

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = \frac{y - y_0}{y' - y_0} = \frac{z - z_0}{z' - z_0} = \frac{1}{lx' + my' + nz' + p},$$

les équations des figures en x', y', z' et x, y, z seront de même degré : alors une droite et un plan de la première figure correspondent à une droite et à un plan de la seconde figure; de plus, *deux points correspondants se trouvent sur une droite qui passe au centre d'homo-*

logie; enfin les rapports anharmoniques sont les mêmes de part et d'autre.

Fig. 1.



Imaginons deux droites SaA, SmM passant au centre d'homologie S et par deux couples de points correspondants a et A, m et M. Le plan MSA de ces droites contiendra les lignes AM, *am*, qui, par conséquent, se couperont en un point μ; de plus, ce point, se trouvant sur deux lignes homologues, appartiendra aux deux figures et sera, par conséquent, sur le plan d'homologie représenté par $lx + my + nz + p = 1$.

V. Pour simplifier la construction (*fig.* 1), admettons que, dans le couple fixe (a, A), celui des points A qui appartient à la figure donnée est à l'infini : alors a sera sur la direction arbitraire, mais fixe, Sa, le correspondant de l'infini. Cela posé, soit, dans cette figure donnée, le point M (x', y', z') dont on cherche le correspondant m (x, y, z); il est clair que $M\mu$, devant passer en A, sera ici parallèle à Sa. Ainsi, soit μ le point où la parallèle menée de M à Sa perce le plan d'homologie, il suffira de joindre $a\mu$ qui coupe SM au point cherché m.

VI. Pour voir que cette construction revient à la perspective dans l'espace, menons, dans le plan $O\mu a$, la parallèle mm_1 à Ox jusqu'à la rencontre de $O\mu$ en m_1; cette parallèle sera donc comprise dans le plan MSS_1, S_1 étant le point où Mm_1 coupe Ox, et nous allons calculer la position du point S_1.

Les triangles $O\mu a$, $m_1\mu m$ donnent

$$\frac{Oa}{mm_1} = \frac{\mu a}{\mu m};$$

ensuite les triangles Sma, μMm donnent

$$\frac{ma}{\mu m} = \frac{mS}{Mm};$$

donc

$$\frac{\mu a}{\mu m} = 1 + \frac{ma}{\mu m} = 1 + \frac{mS}{Mm} = \frac{MS}{Mm} = \frac{SS_1}{mm_1},$$

d'où l'on tire

$$SS_1 = Oa,$$

et la position du point S_1 est fixe.

Ainsi le point m_1 sera la perspective ordinaire du point donné M sur le plan d'homologie pris comme tableau, en supposant le point de vue, c'est-à-dire l'œil du spectateur, placé en S_1.

Par conséquent, la *perspective-relief* de la figure M s'obtiendra en traçant sur le plan d'homologie, que l'on appelle alors *plan invariable*, la perspective ordinaire de cette figure; seulement on prendra alors pour point de vue, c'est-à-dire pour position de l'œil, non plus le centre d'homologie S, mais le point S_1, obtenu de la manière suivante.

Sur la direction Sx, soit dans la seconde figure, le point a correspondant de l'infini sur cette même direction dans la première figure, et, sur cette ligne Sa, portez en sens contraire $SS_1 = Oa$.

D'après cela, il ne reste plus à chercher que la distance $m_1 m$ à laquelle il faut creuser la pierre. On prend le plan d'homologie pour celui des yz; alors $m_1 m = x$ et $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ pour S.

Les coordonnées du point M sont connues, et l'on a

$$OP = y'.$$

On vient de trouver le point m, qui donne

$$On_1 = y;$$

donc les triangles $\mu m m_1$ et $\mu O a$ donnent

$$\frac{x}{Oa} = \frac{\mu m_1}{\mu O}.$$

Mais, dans les triangles $O\mu P = O m_1 n_1$, on a

$$\frac{\mu m_1}{\mu O} = \frac{P n_1}{PO};$$

enfin

$$x = \frac{Oa(y' - y)}{y'}.$$

Pour plus de détails sur ce sujet, on peut consulter le *Traité de Perspective* de M. de la Gournerie.

VII. Arrivons à la partie de notre travail pour laquelle nous avons rappelé ce qui précède, et surtout l'identité de l'homologie avec la perspective dans l'espace; voici le théorème qu'il faut démontrer.

En déplaçant, sans déformation, deux figures homographiques dans l'espace, on peut les rendre homologiques.

L'homographie est définie par les formules connues

$$x = \frac{ax' + by' + cz' + d}{Ax' + By' + Cz' + D},$$

$$y = \frac{a'x' + b'y' + c'z' + d'}{Ax' + By' + Cz' + D},$$

$$z = \frac{a''x' + b''y' + c''z' + d''}{Ax' + By' + Cz' + D}.$$

Nous transporterons, sans rotation, l'une des figures (x', y', z') parallèlement à elle-même, et nous poserons

$$x' = x_1 + X, \quad y' = y + Y, \quad z' = z + Z,$$

ces quantités X, Y, Z étant des constantes qu'il faudra déterminer.

Au contraire, nous ferons tourner, sans translation, l'autre figure (x, y, z) d'un angle ω autour d'une droite passant par l'origine, et qui aura pour équations

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

Il faudra donc aussi déterminer ω, ainsi que α, β et γ;

seulement, les coordonnées étant supposées rectangulaires, les trois dernières inconnues ont la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Les coordonnées du point (x, y, z) deviennent ξ, η, ζ, après cette rotation.

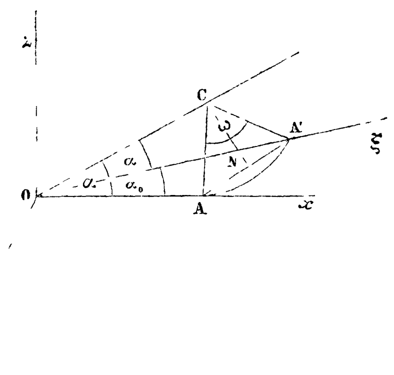
Toutes ces déterminations se feront en indiquant les conditions nécessaires pour que les figures en x_1, y_1, z_1 et ξ, η, ζ soient homologues entre elles.

VIII. Calculons d'abord les formules de rotation (*fig.* 2); observons qu'on a

$$x = l\xi + m\eta + n\zeta, \quad y = l_1\xi + m_1\eta + n_1\zeta, \quad z = l_2\xi + m_2\eta + n_2\zeta,$$

car, l'axe de rotation passant à l'origine, il n'y a pas de termes indépendants, puisque ξ, η, ζ nuls donnent x, y, z nuls, et réciproquement.

Fig. 2.



Pour déterminer les coefficients l, m, n; $l_1, \ldots$, je dis qu'il suffit d'avoir les équations

$$\frac{x}{a_0} = \frac{y}{b_0} = \frac{z}{c_0}, \quad \frac{x}{a_1} = \frac{y}{b_1} = \frac{z}{c_1}, \quad \frac{x}{a_2} = \frac{y}{b_2} = \frac{z}{c_2}$$

des trois axes Ox, Oy, Oz, après qu'ils auront tourné de l'angle ω pour venir en $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ (il est clair que ces équations sont prises par rapport à Ox, Oy, Oz).

Les équations $\frac{x}{a_0}=\frac{y}{b_0}=\frac{z}{c_0}$ de $O\xi$ sont aussi

$$\eta = 0 \quad \text{et} \quad \zeta = 0,$$

ce qui donne, pour un point de cette droite,

$$x = l\xi, \quad y = l_1\xi, \quad z = l_2\xi,$$

ou bien

$$\xi = \frac{x}{l} = \frac{y}{l_1} = \frac{z}{l_2}.$$

On est donc porté à poser $l = a_0$, $l_1 = b_0$, $l_2 = c_0$, ainsi que $m = a_1$, $m_1 = b_1$, $m_2 = c_1$, et $n = a_2$, $n_1 = b_2$, $n_2 = c_2$.

Cependant, pour que ces relations soient vraies, il faut, à cause de la relation $x^2+y^2+z^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$, qui tient à ce que la distance du point à l'origine ne change pas par la rotation, que l'on ait

$$a_0^2+b_0^2+c_0^2=1, \quad a_1^2+b_1^2+c_1^2=1, \quad a_2^2+b_2^2+c_2^2=1.$$

Alors les équations de transformation sont

$$x = a_0\xi + a_1\eta + a_2\zeta, \quad y = b_0\xi + b_1\eta + b_2\zeta, \quad z = c_0\xi + c_1\eta + c_2\zeta.$$

Quant aux coefficients des variables, ils disparaissent, parce que les axes sont rectangulaires; car il est facile de reconnaître, d'après ce qui précède, que ces coefficients ne sont autre chose que les cosinus des angles que $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ font avec Ox, Oy et Oz. Nous reviendrons sur ce sujet.

Ainsi soient α_0, β_0, γ_0 les angles que fait $O\xi$ avec Ox,

Oy, Oz, on a

$$a_0 = \cos\alpha_0, \quad b_0 = \cos\beta_0, \quad c_0 = \cos\gamma_0,$$

et il faut déterminer ces angles (*fig.* 2).

IX. D'abord on a la relation

$$(1) \qquad \cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 1;$$

ensuite la droite Ox, tournant autour de OC, fait toujours avec cet axe le même angle $COA = COA' = \alpha$; donc on a

$$(2) \qquad \cos\alpha = \cos\alpha\cos\alpha_0 + \cos\beta\cos\beta_0 + \cos\gamma\cos\gamma_0.$$

D'abord nous déterminerons directement l'angle $x_0\xi = \alpha_0$. D'un point A, pris n'importe où sur Ox, abaissons sur OC un plan perpendiculaire qui coupera les plans COx et $CO\xi$ suivant CA et CA'. Les triangles rectangles COA, COA' sont égaux comme ayant le côté commun CO adjacent à des angles égaux, puisque $COA = COA' = \alpha$; donc $OA' = OA$, $CA' = CA$. Le point A a tourné jusqu'en A' en décrivant dans le plan $xO\xi$ l'angle $AOA' = \alpha_0$, et dans le plan ACA' l'angle $ACA' = \omega$, d'après l'hypothèse.

Or

$$CA = OA\sin\alpha, \quad \text{et} \quad AA' = 2AN = 2CA\sin\tfrac{1}{2}\omega,$$

ou bien

$$AA' = 2OA\sin\alpha\sin\tfrac{1}{2}\omega,$$

puisque $CA' = CA$. Comme $OA' = OA$, on a aussi, dans le triangle AOA',

$$\cos\alpha_0 = \frac{2\overline{OA}^2 - \overline{AA'}^2}{2\overline{OA}^2},$$

ou bien

$$\cos\alpha_0 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\alpha = 1 - 2L^2,$$

en posant, pour abréger,

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega \sin\alpha = L.$$

D'après cela, $1 - \cos\alpha_0 = 2L^2$, $1 + \cos\alpha_0 = 2(1 - L^2)$; de sorte que les équations (1) et (2) deviennent

$$\cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 4L^2(1 - L^2)$$

et

$$\cos\beta \cos\beta_0 + \cos\gamma \cos\gamma_0 = 2L^2 \cos\alpha.$$

Dans la seconde relation, prenons la valeur de $\cos\gamma_0$ et transportons-la dans la première en élevant au carré, on a

$$\cos^2\beta_0 + \frac{4L^4\cos^2\alpha - 4L^2\cos\alpha\cos\beta\cos\beta_0 + \cos^2\beta\cos^2\beta_0}{\cos^2\gamma}$$
$$= 4L^2(1 - L^2),$$

ce qui donne, à cause de $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, l'équation

$$\cos^2\beta_0(1 - \cos^2\alpha) - 4L^2\cos\alpha\cos\beta\cos\beta_0$$
$$= 4L^2[\cos^2\gamma(1 - L^2) - L^2\cos^2\alpha.$$

Donc

$$\frac{\cos\beta_0 \sin^2\alpha}{2L} = L\cos\alpha\cos\beta$$
$$\pm\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\gamma + L^2[\cos^2\alpha\cos^2\beta + (\cos^2\alpha - 1)(1 - \cos^2\beta)]}.$$

Le radical revient à $\pm\cos\gamma\sqrt{\sin^2\alpha - L^2}$. Mais, ayant égard à $\sin\frac{1}{2}\omega\sin\alpha = L$ et supprimant le facteur commun $\sin\alpha$, on trouvera, à cause de

$$\cos\gamma_0 = \frac{2L^2\cos\alpha - \cos\beta\cos\beta_0}{\cos\gamma},$$

$$\cos\beta_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\alpha\cos\beta \pm \cos\gamma\cos\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$\cos\gamma_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\alpha\cos\gamma \mp \cos\beta\cos\tfrac{1}{2}\omega).$$

X. On peut choisir, dans le premier cosinus, le signe que l'on veut, ce qui indiquera que la rotation aura lieu dans un sens ou dans l'autre; mais il faut toujours prendre les radicaux avec des *signes contraires* dans les deux expressions. En effet, les équations (1) et (2) se vérifient avec des signes contraires et non avec le même signe.

Pour les deux autres axes tournés aussi en $O\eta$ et en $O\zeta$, on opérera de même; seulement il faut que le signe d'un radical choisi, par exemple, dans la valeur de $\cos\beta_0$, détermine, non-seulement celui de $\cos\gamma_0$, mais encore les signes des cosinus analogues relatifs à $O\eta$ et à $O\zeta$.

On arrive à cette détermination au moyen de la relation $x^2+y^2+z^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$, qui fait annuler les coefficients de $\xi\eta$, de $\xi\zeta$ et de $\eta\zeta$ quand on élève au carré les relations du n° VIII. Dans ces relations

$$\begin{aligned}
x &= a_0\xi + a_1\eta + a_2\zeta,\\
y &= b_0\xi + b_1\eta + b_2\zeta,\\
z &= c_0\xi + c_1\eta + c_2\zeta,
\end{aligned}$$

supposons que l'on ait pris le signe $+$ pour $\cos\beta_0 = b_0$, on a

$$\begin{aligned}
a_0 &= \cos\alpha_0 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\alpha,\\
b_0 &= \cos\beta_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma\cos\tfrac{1}{2}\omega),\\
c_0 &= \cos\gamma_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta\cos\tfrac{1}{2}\omega).
\end{aligned}$$

On aura les signes des autres coefficients par une permutation tournante. Voici comment il faut la diriger.

XI. Avant tout, comme il n'y a pas de radical dans la valeur de $\cos\alpha_0$, coefficient de ξ dans la valeur de x, il n'y en aura pas non plus dans celle de $\cos\beta_1$, coefficient de η dans la valeur de y, ni dans celle de $\cos\gamma_2$, coefficient de ζ dans la valeur de z; il sera même facile d'écrire ces coefficients par analogie.

Quant aux radicaux des deux autres coefficients d'une même ligne *verticale* dans les relations précédentes, nous avons vu, sur $\cos\beta_0$ et $\cos\gamma_0$, qu'ils étaient de signes différents; il reste à faire voir qu'il en est de même pour une même ligne *horizontale*.

En effet, la vérification d'une formule telle que

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_0 + \cos\beta_1 \cos\beta_0 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_0 = 0$$

pourra se faire avec cette supposition, tandis qu'elle serait impossible en prenant, par exemple, c_0 et c_1 avec des radicaux de même signe.

En calculant cette vérification, il est bon d'observer que l'identité écrite ci-dessus se décompose en deux, savoir : les termes qui ont $\sin\frac{1}{2}\omega$ à la simple puissance, et les autres termes; dans chaque partie, la vérification se fait à part, et l'on simplifie le calcul en supprimant les facteurs communs à mesure qu'on les rencontre.

D'après ces règles et d'après les valeurs de b_0 et de c_0, on doit écrire

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos\alpha_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma\cos\tfrac{1}{2}\omega),\\
b_1 &= \cos\beta_1 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\beta,\\
c_1 &= \cos\gamma_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\gamma\cos\beta + \cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}\omega),
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
a_2 &= \cos\alpha_2 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\gamma\cos\alpha + \cos\beta\cos\tfrac{1}{2}\omega),\\
b_2 &= \cos\beta_2 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\gamma\cos\beta - \cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}\omega),\\
c_2 &= \cos\gamma_2 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\gamma.
\end{aligned}$$

XII. Dans les formules de l'homographie (VII), il faut donc substituer

$$x' = x_1 + X, \ldots \quad \text{et} \quad x = a_0\xi + a_1\eta + a_2\zeta, \ldots \;(\text{VIII}),$$

puis établir que les figures en x_1, y_1, z_1, et en ξ, η, ζ satisfont aux formules de l'homologie (IV).

La première des trois formules donnera

$$a_0\xi + a_1\eta + a_2\zeta = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + aX + bY + cZ + d}{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + AX + BY + CZ + D},$$

et l'on pourrait poser deux égalités analogues.

Mais cette première donnera quatre identités en remplaçant ξ, η, ζ par leurs expressions tirées des formules de l'homologie.

On a

$$\begin{aligned}\xi &= x_0 + \frac{x_1 - x_0}{lx_1 + my_1 + nz_1 + p} \\ &= \frac{x_1(lx_0 + 1) + my_1 x_0 + nz_1 x_0 + x_0(p-1)}{lx_1 + my_1 + nz_1 + p}.\end{aligned}$$

De même

$$\eta = \frac{lx_1 y_0 + y_1(my_0 + 1) + nz_1 y_0 + y_0(p-1)}{lx_1 + my_1 + nz_1 + p},$$

et

$$\zeta = \frac{lx_1 z_0 + my_1 z_0 + z_1(nz_0 + 1) + z_0(p-1)}{lx_1 + my_1 + nz_1 + p}.$$

En substituant ces valeurs dans $a_0\xi + a_1\eta + a_2\zeta$, on a une expression dont le numérateur sera

$$\begin{aligned}&x_1[a_0(lx_0 + 1) + a_1 ly_0 + a_2 lz_0] \\ &\quad + y_1[a_0 mx_0 + a_1(my_0 + 1) + a_2 mz_0] \\ &\quad + z_1[a_0 nx_0 + a_1 ny_0 + a_2(nz_0 + 1)] \\ &\quad + (p-1)(a_0x_0 + a_1y_0 + a_2z_0),\end{aligned}$$

et qui aura pour dénominateur $lx_1 + my_1 + nz_1 + p$.

Posons, pour abréger, $A' = a_0x_0 + a_1y_0 + a_2z_0$, le numérateur devient

$$x_1(lA' + a_0) + y_1(mA' + a_1) + z_1(nA' + a_2) + (p-1)A',$$

et il reste

$$\frac{x_1(l\mathrm{A}'+a_0)+y_1(m\mathrm{A}'+a_1)+z_1(n\mathrm{A}'+a_2)+(p-1)\mathrm{A}'}{lx_1+my_1+nz_1+p}$$
$$=\frac{ax_1+by_1+cz_1+a\mathrm{X}+b\mathrm{Y}+c\mathrm{Z}+d}{\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\mathrm{C}z_1+\mathrm{AX}+\mathrm{BY}+\mathrm{CZ}+\mathrm{D}}$$
$$=\frac{ax_1+by_1+cz_1+\sigma}{\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\mathrm{C}z_1+\Sigma}.$$

XIII. Pour que les coordonnées x_1, y_1, z_1 ne dépassent pas le premier degré, il faut que les deux dénominateurs ne diffèrent que par un facteur constant, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{l}{\mathrm{A}}=\frac{m}{\mathrm{B}}=\frac{n}{\mathrm{C}}=\frac{p}{\Sigma}=\mathrm{R};$$

il reste alors

$$x_1(\mathrm{RAA}'+a_0)+y_1(\mathrm{RBA}'+a_1)+z_1(\mathrm{RCA}'+a_2)+\mathrm{A}'(\mathrm{R}\Sigma-1)$$
$$=\mathrm{R}(ax_1+by_1+cz_1+\sigma).$$

Comme cette égalité est vraie pour toutes les valeurs de x_1, y_1, z_1, on sait que les coefficients de ces variables et le terme indépendant doivent être les mêmes de part et d'autre; ainsi

$$\mathrm{RAA}'+a_0=\mathrm{R}a.$$

De cette égalité et des trois autres, on tire les quatre relations

$$a_0=\mathrm{R}(a-\mathrm{AA}'),$$
$$a_1=\mathrm{R}(b-\mathrm{BA}'),$$
$$a_2=\mathrm{R}(c-\mathrm{CA}'),$$
$$\mathrm{A}'=\mathrm{R}(\mathrm{A}'\Sigma-\sigma).$$

Ensuite, mettons b_0, b_1, b_2 et b', au lieu de a_0, a_1, a_2

et de a, b, c; on a de même

$$b_0 = R(a' - AB'),$$
$$b_1 = R(b' - BB'),$$
$$b_2 = R(c' - CB'),$$
$$B' = R(B'\Sigma - \sigma').$$

On voit que

$$B' = b_0 x_0 + b_1 y_0 + b_2 z_0 \quad \text{et} \quad \sigma' = a'X + b'Y + c'Z + d'.$$

On aurait encore quatre relations avec c_0, c_1, c_2 :

$$c_0 = R(a'' - AC'),$$
$$c_1 = R(b'' - BC'),$$
$$c_2 = R(c'' - CC'),$$
$$C' = R(C'\Sigma - \sigma'');$$

en tout douze, pour trouver x_0, y_0, z_0 et X, Y, Z, ainsi que la ligne p et le nombre R, avec les angles α, β, γ et ω; mais nous avons

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

ce qui réduit à onze le nombre des inconnues.

XIV. Les trois premières des relations précédentes donnent

$$\frac{a_0}{A} - \frac{a_1}{B} = R\left(\frac{a}{A} - \frac{b}{B}\right), \quad \frac{a_0}{A} - \frac{a_2}{C} = R\left(\frac{a}{A} - \frac{c}{C}\right),$$

ce qui élimine A'; ces égalités reviennent à

$$a_0 B - a_1 A = R(aB - bA), \quad a_0 C - a_2 A = R(aC - cA).$$

Divisant pour éliminer R et réduisant, on a

$$a_0 A(bC - cB) + a_1 B(cA - aC) + a_2 C(aB - bA) = 0,$$

égalité où il faut transporter les expressions connues de

$$a_0 = \cos\alpha_0 = \cos x\xi, \quad a_1 = \cos\alpha_1 = \cos x\eta, \quad a_2 = \cos\alpha_2 = \cos x\zeta,$$

c'est-à-dire

$$a_0 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega \sin^2\alpha,$$
$$a_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma\cos\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$a_2 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta\cos\tfrac{1}{2}\omega).$$

Posant, pour abréger,

$$A(bC - cB) = e, \quad B(cA - aC) = e_1, \quad C(aB - bA) = e_2,$$

l'égalité ci-dessus devient

$$ea_0 + e_1 a_1 + e_2 a_2 = 0.$$

Mais ces trois coefficients présentent la relation évidente

$$e + e_1 + e_2 = 0.$$

Donc

$$\frac{e_1}{e} + \frac{e_2}{e} = -1.$$

Posons

$$\frac{e_1}{e} - \frac{c_2}{e} = \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{e_1}{e} = \frac{1}{2}(\varepsilon - 1), \quad \frac{e_2}{e} = -\frac{1}{2}(\varepsilon + 1),$$

l'égalité $a_0 + \frac{e_1}{e}a_1 + \frac{e_2}{e}a_2 = 0$ devient

$$2a_0 = a_1(1 - \varepsilon) + a_2(1 + \varepsilon).$$

XV. Dans cette équation, les inconnues sont l'angle ω, ainsi que $\lambda = \cos\alpha$, $\mu = \cos\beta$, $\nu = \cos\gamma$, avec la relation $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$.

Observons encore que $2\sin^2\frac{1}{2}\omega = 1 - \cos\omega$, et que $2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega = \cos\omega$, les expressions précédentes deviennent

$$a_0 = 1 - (1 - \cos\omega)(1 - \lambda^2) = (1 - \cos\omega)\lambda^2 + \cos\omega,$$
$$a_1 = (1 - \cos\omega)\mu\lambda - \nu\sin\omega,$$
$$a_2 = (1 - \cos\omega)\nu\lambda + \mu\sin\omega.$$

On en conclut

$$2a_0 = (1-\varepsilon)[(1-\cos\omega)\mu\lambda - \nu\sin\omega]$$
$$+ (1+\varepsilon)[(1-\cos\omega)\nu\lambda + \mu\sin\omega],$$

ce qui se réduit à

$$\lambda[2\lambda - (\mu+\nu) + \varepsilon(\mu-\nu)]$$
$$= \sin\omega[\mu - \nu + \varepsilon(\mu+\nu)]$$
$$+ \cos\omega[2\lambda^2 - \lambda(\mu+\nu) + \lambda\varepsilon(\mu-\nu) - 2].$$

Les relations symétriques à la première seront

$$e' b_0 + e'_1 b_1 + e'_2 b_2 = 0,$$

avec la relation

$$e' + e'_1 + e'_2 = 0.$$

Mais ici, comme l'angle β domine les autres, il faut écrire

$$\frac{e'}{e'_1} b_0 + b_1 + \frac{e'_2}{2} b_2 = 0,$$

et prendre

$$\varepsilon' = \frac{e'_2}{e'_1} - \frac{e'}{e'_1},$$

en commençant par l'indice 2 qui, avec $e_1 - e_2$, avait le signe négatif. Alors, comme $e_1 - e_2$ entraînait $\mu - \nu$, puisque l'indice 1 correspond à μ et l'indice 2 à ν, on prendra ici $\nu - \lambda$ pour $e'_2 - e'$.

De même la troisième relation sera

$$\frac{e''}{e''_2} c_0 + \frac{e''_1}{e''_2} + c_2 = 0,$$

et l'on a

$$e'' + e''_1 + e''_2 = 0,$$

ce qui fait poser, par la symétrie indiquée,

$$\frac{e'' - e''_1}{e''_2} = \varepsilon''.$$

Cette différence correspond à $\lambda - \mu$.

Dans l'égalité que l'on vient d'obtenir, posons, pour abréger,

$$E = \lambda[2\lambda - (\mu + \nu) + \varepsilon(\mu - \nu)] \quad \text{et} \quad H = \mu - \nu + \varepsilon(\mu + \nu),$$

elle devient

$$(1) \qquad E = H \sin\omega + \cos\omega\,(E - 2).$$

On aura de même

$$(2) \qquad F = I \sin\omega + \cos\omega\,(F - 2),$$

$$(3) \qquad G = K \sin\omega + \cos\omega\,(G - 2),$$

en posant

$$F = \mu[2\mu - (\nu + \lambda) + \varepsilon'(\nu - \lambda)], \quad I = \nu - \lambda + \varepsilon'(\nu + \lambda),$$

et

$$G = \nu[2\nu - (\lambda + \mu) + \varepsilon''(\lambda - \mu)], \quad K = \lambda - \mu + \varepsilon''(\lambda + \mu).$$

XVI. Divisons (1) par (2), il vient

$$\frac{E}{F} = \frac{H \operatorname{tang}\omega + E - 2}{I \operatorname{tang}\omega + F - 2};$$

d'où

$$(4) \qquad 2(F - E) = \operatorname{tang}\omega\,(FH - EI);$$

de même

$$(5) \qquad 2(E - G) = \operatorname{tang}\omega\,(EK - GH),$$

et

$$(6) \qquad 2(G - F) = \operatorname{tang}\omega\,(GI - FK).$$

Ajoutant et observant que les premiers membres se détruisent, on en conclura

$$(7) \qquad FH + EK + GI = EI + GH + FK.$$

En y remplaçant E, H,... par leurs valeurs, on a une équation du troisième degré en λ, μ, ν.

XVII. De (1) et (2), on tire

$$\sin\omega = \frac{2(F-E)}{FH-EI+2(I-H)},\quad \cos\omega = \frac{FH-EI}{FH-EI+2(I-H)}.$$

Élevant au carré, ajoutant et réduisant, on trouve

$$(E-F)^2 + (H-I)(FH-EI+I-H) = 0.$$

On obtiendra de même

$$(F-G)^2 + (I-K)(GI-FK+K-I) = 0$$

et

$$(G-E)^2 + (K-H)(EK-GH+H-K) = 0.$$

Ajoutant et réduisant, on obtient

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &2(E^2+F^2+G^2-FG-EG-EF)\\ &\quad +(H^2-IK)(G+F-2)\\ &\quad +(I^2-HK)(G+E-2)\\ &\qquad\qquad +(K^2-IH)(E+F-2) = 0.\end{aligned}\right.$$

En remplaçant encore E, F, G et H, I, K par leurs valeurs en fonction de λ, μ, ν, on reconnaît que cette équation est du quatrième degré; donc elle ne se confond pas avec (7). Du reste, (7) et (8) ne sont pas des identités, car il y a, par exemple, un seul terme en λ^3 dans la première et en λ^4 dans la seconde, comme on le voit sans peine.

Ainsi la question, déjà ramenée à la recherche de l'axe de rotation autour duquel se décrit l'angle ω, se résout en éliminant les cosinus λ, μ, ν entre les équations (7) et (8), et entre la relation bien connue

$$(9)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Sans doute cette élimination serait pénible dans la discussion et la pratique; mais il suffit que l'on soit parvenu à trois équations numériques entre trois inconnues pour que l'on considère toujours comme possible de calculer ces inconnues λ, μ, ν, et d'obtenir ainsi les angles α, β, γ correspondant à ces cosinus.

XVIII. Cette complication ne se présentait pas pour les figures planes, parce que l'axe de rotation était connu comme perpendiculaire au plan de la figure.

Ici, du reste, dès que l'on connaît $\lambda = \cos\alpha$, $\mu = \cos\beta$, $\nu = \cos\gamma$, on connaît $\tang\omega$ par une des relations (4), (5), (6).

Ensuite, connaissant α, β, γ et ω, on aura a_0, b_0, c_0 par les formules du n° X; on aura de même a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2.

XIX. On a aussi, n° XIII, $\frac{a_0}{a_1} = \frac{a - AA'}{b - BA'}$, ce qui donne A'. On obtiendra de même B' et C', et, comme on a posé au n° XII

$$A' = a_0 x_0 + a_1 y_0 + a_2 z_0, \ldots,$$

il en résulte trois relations qui donnent x_0, y_0, z_0.

De plus, connaissant A', une relation telle que

$$a_0 = R(a - AA')$$

donne

$$R = \frac{a_0}{a - AA'}.$$

On connaît donc $l = AR$, $m = BR$, $n = CR$.

XX. Maintenant, dans les relations

$$A' = R(A'\Sigma - \sigma), \quad B' = R(B'\Sigma - \sigma'), \quad C' = R(C'\Sigma - \sigma''),$$

où

$$\Sigma = AX + BY + CZ + D \quad \text{et} \quad \sigma = aX + bY + cZ + d, \ldots,$$

tout est connu, excepté X, Y, Z, dont on obtiendra ainsi les valeurs.

Enfin, Σ étant déterminé par ces trois quantités, on trouvera

$$p = \mathrm{R}\Sigma.$$

Ainsi la question est complétement résolue.