Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 460-472

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__460_0>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 858

(voir 2e série, t. VII, p. 190);

PAR M. FARINEAU,
Élève du lycée de Lille (Classe de M. Diguet).

D'un point M *situé dans le plan d'une conique, on mène à celle-ci les deux tangentes* MA *et* MB, *puis par* M *on mène une droite* MC.

Aux points A *et* B, *on construit les coniques ayant quatre points confondus avec la proposée et tangentes à* MC.

Démontrer que : 1° *ces coniques touchent* MC *au même point* C; 2° *si l'on faisait tourner l'une d'elles de manière à la rabattre autour de* MC, *du côté de la première, les coniques ainsi obtenues auraient en ce point un contact du troisième ordre.*

(A. RIBAUCOUR.)

1° Je m'appuierai sur cette proposition :

Si deux coniques ont quatre points confondus, la polaire d'un point de la tangente commune est la même pour les deux coniques.

On la démontre facilement en prenant pour axe des y la tangente, pour axe des x une droite quelconque, pour origine le point quadruple. Les équations des coniques sont alors

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2x = 0,$$
$$a'x^2 + 2bxy + cy^2 + 2x = 0;$$

la polaire d'un point de l'axe des y dont l'ordonnée est β est

$$\beta f'_y + 2x = 0,$$

et on voit que cette droite est la même pour les deux coniques.

Il résulte de là que la polaire du point M par rapport aux deux premières coniques est la même, c'est-à-dire que les trois points A, C, B sont en ligne droite; ce qui démontre la première partie du théorème.

2° La seconde partie du théorème est inexacte, excepté dans le cas où la droite MC est perpendiculaire à AB.

En effet, je suppose l'angle MCA aigu. Quand on rabattra la conique inférieure autour de MC, la droite AC se placera dans l'angle BCM. Or, si les deux coniques avaient alors en C quatre points confondus, les polaires AC et BC du point M seraient confondues, ce qui n'a lieu que lorsque MC est perpendiculaire à AB.

Je vais démontrer seulement que les deux coniques, après le rabattement, ont un contact du second ordre, c'est-à-dire trois points confondus.

Je prends le point C pour origine; pour axe des x, CM; pour axe des y, AB. L'équation de la première conique est

$$[y + m(x - a)][y + m'(x - a)] + \lambda x^2 = 0;$$

les équations des coniques qui ont quatre points confondus avec la précédente en A et B sont

$$(1) \qquad y[y + m(x - a)] + \frac{m\lambda}{m - m'} x^2 = 0,$$

$$(2) \qquad y[y + m'(x - a)] + \frac{m'\lambda}{m' - m} x^2 = 0.$$

Je prends pour axe des y une perpendiculaire à CM, CM restant l'axe des x. Les formules de transformation sont

$$x = X - Y\cot\theta, \quad y = \frac{Y}{\sin\theta}, \quad \theta = \text{ang}\,BCM;$$

les équations (1) et (2) deviennent

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{y}{\sin\theta}\left[\frac{y}{\sin\theta} + m(x - a - y\cot\theta)\right] \\ &\qquad + \frac{m\lambda}{m - m'}(x - y\cot\theta)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{y}{\sin\theta}\left[\frac{y}{\sin\theta} + m'(x - a - y\cot\theta)\right] \\ &\qquad + \frac{m'\lambda}{m' - m}(x - y\cot\theta)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation de la courbe (4) rabattue autour de MC s'obtiendra en changeant y en $-y$; ce sera

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{y}{\sin\theta}\left[-\frac{y}{\sin\theta} + m'(x - a + y\cot\theta)\right] \\ &\qquad + \frac{m'\lambda}{m - m'}(x + y\cot\theta)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Je cherche un couple de sécantes communes aux courbes (3) et (4), et pour cela je les ajoute, après les avoir multipliées par m' et $-m$. Il vient

$$y\left[\frac{y(m + m')}{\sin\theta} - 2mm'\cot\theta y - \frac{4\lambda mm'}{m - m'}\cos\theta x\right] = 0,$$

équation qui donne deux droites : l'une est MC, l'autre passe par l'origine

$$y(m + m' - 2mm'\cos\theta) - \frac{2\lambda mm'}{m - m'}\sin 2\theta x = 0.$$

Pour que les deux coniques aient un contact du troisième ordre, il faut que cette sécante se confonde avec MC, c'est-à-dire que son équation soit identique avec $y = 0$; ce qui aura lieu si le coefficient de x est nul, c'est-à-dire si $\sin 2\theta = 0$, ce qui donne

$$\theta = 90^\circ.$$

Ainsi l'on retombe sur la condition trouvée précédemment.

On peut démontrer plus simplement que les deux coniques ont même cercle osculateur en C.

Je fais tourner la conique inférieure autour de C jusqu'à ce que CB se place dans la direction CA; et CM', prolongement de CM, dans la direction CM. Les deux coniques sont alors du même côté de CM. Or cette rotation revient à changer la direction des axes de la seconde conique : on aura donc son équation en changeant x en $-x$, y en $-y$ dans l'équation (2), ce qui donne

$$(6) \qquad y[y + m'(x+a)] + \frac{m'\lambda}{m' - m} x^2 = 0.$$

J'ajoute les équations (1) et (6) multipliées par m' et par m, j'ai

$$y[y(m+m') + 2mm'x] = 0,$$
$$y = 0,$$
$$y(m+m') + 2mm'x = 0.$$

Donc les deux coniques ont bien en C trois points confondus.

Note. — Solutions peu différentes de MM. Kaher Bey et A. Lemaître, Répétiteur au lycée de Besançon.

Question 870

(voir 2e série, t. VII, p. 237);

PAR M. BROCARD,

Sous-lieutenant du Génie.

Lieu des centres de courbure principaux correspondants aux points d'une surface gauche qui sont situés sur une génératrice. (DARBOUX.)

Remplaçons la surface gauche par son hyperboloïde osculateur le long de la génératrice considérée. En prenant cette génératrice pour axe des z, l'équation de cet hyperboloïde sera

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2C'x + 2C'y = 0.$$

Les sections principales, qui renferment les centres de courbure dont on demande le lieu, sont formées par les plans

$$z = \gamma,$$

et l'une quelconque d'entre elles a pour projection sur le plan des xy la conique

$$(1)\quad Ax^2 + 2Bxy + A'y^2 + 2(B'\gamma + C)x + 2(B\gamma + C')y = 0$$

qui passe par l'origine.

Le centre de courbure principal est le centre de courbure correspondant à l'origine, et il a pour coordonnées

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -\frac{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \\ y_1 &= \frac{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \end{aligned} \right.$$

expressions dans lesquelles $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ont les valeurs correspondantes à $x = 0$, $y = 0$.

Deux différentiations successives de l'équation (1) donnent

$$Ax + By + B'\gamma + C + \frac{dy}{dx}(A'y + Bx + B\gamma + C') = 0,$$

$$A + B\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(A'\frac{dy}{dx} + B\right) + \frac{d^2y}{dx^2}(A'y + Bx + B\gamma + C') = 0.$$

On en tire, après avoir fait $x = y = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{B'\gamma + C}{B\gamma + C'},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{A(B\gamma + C')^2 - 2B(B\gamma + C')(B'\gamma + C) + A'(B'\gamma + C)^2}{(B\gamma + C')^3}.$$

En remplaçant $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ par leurs valeurs dans les équations (2), puis γ par z, on aurait les équations de la courbe lieu des centres de courbure demandé. En divisant membre à membre les équations (2) on a, en supprimant les accents,

$$\frac{y}{x} = \frac{Bz + C'}{B'z + C}$$

ou

$$B'yz - Bxz + Cy - C'x = 0 :$$

c'est l'équation du paraboloïde des normales à la surface gauche le long de la génératrice Oz. On en tire

$$z = \frac{C'x - Cy}{B'y - Bx},$$

et en portant dans l'une des équations (2) on a

$$y(B'y - Bx)(Ay^2 + A'x^2 - 2Bxy) = x(B'C' - BC)(x^2 + y^2),$$

qui représente le cylindre projetant la courbe sur le plan des xy. La courbe elle-même est l'intersection de ce cylindre avec le paraboloïde des normales.

Note. — La même question a été résolue par M. Pellet.

Question 871

(voir 2e série, t. VII, p. 237),

PAR M. E. PELLET.

Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une ellipse et à toutes les hyperboles équilatères qui *ont même centre que l'ellipse et qui passent par ses foyers.* (DARBOUX.)

L'équation de l'ellipse étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

l'équation d'une des hyperboles équilatères sera

$$x^2-y^2+2Bxy-c^2=0.$$

Pour que la droite

$$(1)\qquad \frac{x\cos u}{a}+\frac{y\sin u}{b}=1,$$

qui est tangente à l'ellipse, soit tangente à l'hyperbole, il faut que l'on ait

$$(2)\quad (B^2a^2b^2+a^4)\operatorname{tang}^2 u-2Babc^2\operatorname{tang} u+B^2a^2b^2+b^4=0.$$

Or si, dans l'équation (1), on remplace $\sin u$ et $\cos u$ par leurs expressions en fonction de $\operatorname{tang} u$, on obtient

$$(3)\qquad \left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)\operatorname{tang}^2 u+2\frac{xy}{ab}\operatorname{tang} u+\frac{x^2}{a^2}-1=0;$$

et si le point (x, y) est l'intersection de deux tangentes communes, les équations (2) et (3) donnent les mêmes valeurs de $\operatorname{tang} u$; elles sont identiques, et l'on a

$$\frac{B^2a^2b^2+a^4}{\frac{y^2}{b^2}-1}=\frac{B^2a^2b^2+b^4}{\frac{x^2}{a^2}-1}=-\frac{B^2a^2b^2c^2}{xy}.$$

En éliminant B entre ces deux dernières équations, on trouve pour équation du lieu

$$a^2b^2(x^2+y^2)^2-(a^4-b^4)(b^2x^2-a^2y^2)=0.$$

Cette équation représente une courbe fermée, dont l'origine est un point double, et qui est entièrement comprise entre les droites $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ et $x^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^2}$.

Question 897

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 557);

PAR M. SCHLEGEL,

Étudiant en Mathématiques à Berlin.

1° *Soient* P *un point variable d'une courbe plane donnée* (A), O *un point fixe et* Q *le sommet d'une hyperbole équilatère dont le centre est en* O *et qui touche la courbe donnée en* P. *Montrer que la tangente en* Q *à la courbe lieu du point* Q *fait avec* OQ *un angle égal à celui que fait* OP *avec la tangente à* (A) *en* P.

2° *La courbe* (B), *inverse du lieu de* Q *par rapport à l'origine* O, *sera réciproque à la courbe donnée; c'est-à-dire que si* B *est regardée comme donnée, la courbe primitive* (A) *en dérivera précisément comme* (B) *dérive de* (A). (W. ROBERTS.)

En employant les coordonnées polaires et en prenant le point O pour pôle, on a pour l'équation d'une hyperbole équilatère

$$(1) \qquad r^2 \sin 2(\varphi - \theta) = a^2$$

où r et φ désignent les coordonnées, θ l'angle que fait l'axe polaire avec une asymptote, et a la distance du sommet de l'hyperbole à son centre. Les sommets de l'hyperbole ont les coordonnées

$$r = a,$$

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{\psi}$$

et

$$r = a,$$

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{\psi} + \pi.$$

θ et a sont donc deux paramètres variables qui sont déterminés par la condition que la courbe (A) et l'hyperbole se touchent. L'équation de la courbe (A) étant

$$(2) \qquad f(r, \varphi) = 0,$$

l'angle ψ que fait la tangente au point $P(r_1, \varphi_1)$ satisfera à l'équation

$$\cot\psi = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1}.$$

Pour l'hyperbole, on a donc

$$\cot\psi = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1} = -\cot 2(\varphi_1 - \theta).$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que les deux courbes se touchent est

$$\cot 2(\varphi_1 - \theta) = -\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1}.$$

Cette équation donne la valeur de θ. On ne prend qu'une valeur correspondante pour a dans l'équation

$$r_1^2 \sin 2(\varphi_1 - \theta) = a^2,$$

parce que nous supposons a toujours positif. L'équation de la courbe lieu du sommet Q s'obtient donc en éliminant r_1, φ_1, a et θ entre les équations

$$r = a, \quad a^2 = r_1^2 \sin 2(\varphi_1 - \theta), \quad \varphi = \theta + \frac{\pi}{\psi},$$

$$\cot 2(\varphi_1 - \theta) = -\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1}, \quad f(r_1 \varphi_1) = 0.$$

Il en résulte

$$(3) \qquad r^2 = r_1^2 \cos 2(\varphi_1 - \varphi),$$

$$(4) \qquad \tang 2(\varphi_1 - \varphi) = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1}.$$

En prenant les logarithmes des deux membres de l'équation (3) et différentiant par rapport à φ en considérant φ_1 comme fonction de φ on trouve

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi} - \tang 2(\varphi_1 - \varphi)\left(\frac{d\varphi_1}{d\varphi} - 1\right).$$

Cette formule donne, en ayant égard à l'équation (4),

$$(5) \qquad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1};$$

d'où résulte immédiatement le théorème 1°.

On obtient l'équation de la courbe (B) en substituant, dans l'équation de la courbe lieu du sommet Q, à r, $\frac{1}{r}$; il s'ensuit

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} 1 = r^2 r_1^2 \cos 2(\varphi_1 - \varphi) \quad \text{ou} \quad 1 = r_1^2 r^2 \cos 2(\varphi - \varphi_1) \\ -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi}, \end{array}\right.$$

$$(7) \qquad \tang 2(\varphi_1 - \varphi) = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1} \quad \text{ou} \quad \tang 2(\varphi - \varphi_1) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}.$$

On voit que les équations (6) et (7) restent les mêmes si l'on change r en r_1, φ en φ_1, et inversement. Donc la courbe (B) sera réciproque à la courbe donnée (A) dans le sens fixé.

Note. — La question a été, de même, résolue par MM. Doucet, et Jules Lefebvre, élève à l'École Normale supérieure.

Question 898

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 45);

PAR M. WILLIÈRE.

On donne un cercle C *tangent à une droite* D *en* O. *D'un point* M *de la circonférence on mène* MA *perpendiculaire à* D, *et l'on prend* AB = AO. *On joint* BM, *et l'on demande l'enveloppe de la droite* BM *quand le point* M *se déplace sur la circonférence. L'enveloppe cherchée admet trois axes de symétrie et trois points de rebroussement remarquables.* (H. Brocard.)

Je prends pour axe des x la tangente D et pour axe des y le diamètre perpendiculaire; l'équation du cercle sera

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0$$

et celle de la droite BM

$$x'y + y'x - 2x'y' = 0. \tag{1}$$

Les coordonnées x', y' étant liées par la relation

$$x'^2 + y'^2 - 2Ry' = 0, \tag{2}$$

l'équation (1) donne

$$x' = -\frac{y'x}{y - 2y'}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (2), celle-ci devient

$$\frac{y'^2x^2}{(y - 2y')^2} + y'^2 - 2Ry' = 0$$

ou

$$4y'^3 - 4y'^2(y+2R) + y'(x^2+y^2+8Ry) - 2Ry^2 = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe demandée, il reste à éliminer y' entre cette équation et l'équation dérivée

$$12y'^2 - 8y'(y+2R) + x^2 + y^2 + 8Ry = 0,$$

ce qui donne le déterminant

$$\begin{vmatrix} 6 & -(y+2R) & x^2+y^2+8Ry \\ -8(y+2R) & x^2+y^2+8Ry & 6Ry^2-(y+2R)(x^2+y^2+8Ry) \\ x^2+y^2+8By & -3Ry^2 & 4Ry^2(y+2R) \end{vmatrix} = 0$$

ou l'équation

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 20Rx^2y - 12Ry^3 \\ - 4R^2x^2 + 48R^2y^2 - 64R^3y = 0. \end{aligned}$$

Prenons les dérivées par rapport à x et à y, nous aurons les équations

$$(3)\quad \frac{df}{dx} = x(x^2+y^2+10Ry-2R^2) = 0,$$

$$(4)\quad \frac{df}{dy} = y^3 + x^2y + 5Rx^2 - 9Ry^2 + 24R^2y - 16R^3 = 0.$$

La première donne immédiatement $x=0$; cette valeur, substituée dans la seconde, fournit l'équation du troisième degré en y

$$y^3 - 9Ry^2 + 24R^2y - 16R^3 = 0,$$

qui est satisfaite pour $y = 4R$; d'ailleurs l'équation de l'enveloppe est aussi satisfaite pour $x=0$, $y=4R$; et pour toute valeur de y plus grande que $4R$, elle donne pour x des valeurs imaginaires; donc l'enveloppe a un point de rebroussement sur l'axe des y, qui est un axe de symétrie, puisque l'équation ne renferme que des puissances paires de x.

L'équation (3) donne encore

$$x^2 = 2R^2 - y^2 - 10Ry;$$

substituant cette valeur de x^2 dans l'équation (4), il vient

$$4y^2 + 4Ry + R^2 = 0$$

ou

$$(2y + R)^2 = 0,$$

d'où

$$y = -\frac{R}{2},$$

et, par suite,

$$x = \pm \frac{R}{2}\sqrt{27}.$$

Ces valeurs vérifient aussi l'équation de la courbe; donc elles représentent les coordonnées de deux autres points de rebroussement, situés sur les axes de symétrie :

$$y - \frac{x}{\sqrt{3}} = R,$$

$$y + \frac{x}{\sqrt{3}} = R.$$

L'enveloppe touche le cercle (C) en trois points, qui sont les sommets du triangle équilatéral inscrit. Les hauteurs de ce triangle sont les trois axes de symétrie.

Note. — Cette question a été résolue par MM. H. Brocard, H. Janssen, C. Despinoy, Guébhard, Cahen, Jasseron, Kiepert, Millasseau.