NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Sur un paradoxe algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 456-458

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__456_1>

SUR UN PARADOXE ALGÉBRIQUE;

PAR M. E. CATALAN.

Un ouvrage remarquable, récemment publié (*), contient, parmi beaucoup de bonnes choses, les deux propositions suivantes :

« ... Dans la suite d'égalités

$$(A)\qquad e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}} = \ldots = e^{2k\pi\sqrt{-1}},$$

qu'on élève tous les membres à la puissance $\sqrt{-1}$, et l'on aura

$$(B)\qquad e^{-2\pi} = e^{-4\pi} = e^{-6\pi} = \ldots = e^{-2k\pi},$$

conséquence complétement inadmissible (p. 254). »

. . . .

« On est par conséquent autorisé à substituer à la formule non démontrée d'Euler, la suivante :

$$(\sqrt{-1})^{\frac{2\alpha}{\pi}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

ou, si l'on veut,

$$(C)\qquad (-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

dont la justification est parfaitement établie (p. 257). »

(*) *Des formes imaginaires; leur interprétation en abstrait et en concret;* par M. VALLÈS, ingénieur honoraire des Ponts et Chaussées. Paris; Gauthier-Villars; 1869.

Les assertions de l'honorable auteur sont trop graves pour passer inaperçues. Je vais donc essayer de montrer : 1° que la formule *proposée* (C) est loin d'être préférable à celle d'Euler ; 2° que les égalités (B) ne sont pas des *conséquences* de (A).

I.

Considérons d'abord la relation (C). Si l'on y suppose

$$\alpha = \frac{p}{q}\pi,$$

p et q étant des entiers premiers entre eux, elle devient

$$\text{(D)} \qquad (-1)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{q}\pi.$$

Celle-ci, *évidente* lorsque $q = 1$, n'est pas admissible en général. En effet, le premier membre a q valeurs, et le second en a seulement *une*. Comme l'apprend la théorie des équations binômes, ce second membre doit être remplacé par

$$\cos\frac{2k\pi}{q} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{q},$$

si p est pair ; et par

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{q} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{q},$$

si p est *impair*.

II.

J'arrive maintenant à l'équation *absurde*

$$\text{(B)} \qquad e^{-2\pi} = e^{-4\pi},$$

déduite de l'équation *exacte*

$$\text{(A)} \qquad e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}}.$$

Par *définition*, $e^{2k\pi\sqrt{-1}} = \cos 2k\pi + \sqrt{-1}\sin 2k\pi = 1$. Ainsi, déjà, *chacun des deux membres de l'équation* (A) *représente l'unité*. D'un autre côté, l'expression « *puissance* $\sqrt{-1}$ » n'ayant aucun sens *à priori*, nous admettrons que $(e^{2k\pi\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}} = 1^{\sqrt{-1}}$; et il nous suffira de définir ce dernier symbole.

Or, si l'on fait

$$1^{\sqrt{-1}} = y,$$

on a, en général (*),

$$ly = \sqrt{-1}\, l(1) = \sqrt{-1} . 2k'\pi\sqrt{-1} = -2k'\pi;$$

donc

$$y = e^{-2k'\pi}.$$

Autrement dit :

La puissance $\sqrt{-1}$ *de l'expression* $e^{2k\pi\sqrt{-1}}$ *a une infinité de valeurs réelles, inégales, et formant une progression par quotient.* En particulier, si l'on élève à la puissance marquée par $\sqrt{-1}$, les deux expressions (A), égales chacune à l'unité, on reproduit deux fois cette progression. Mais *de ce que* $e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}}$, *on ne peut pas conclure* $e^{-2\pi} = e^{-4\pi}$.