NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PH. GILBERT

Sur la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 434-437

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__434_1>

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES TERMES D'UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE;

PAR M. PH. GILBERT.

Posons

$$\sigma_{n,p} = \mu^p + (\mu + \alpha)^p + (\mu + 2\alpha)^p + \ldots + (\mu + n\alpha)^p,$$

n et p étant des nombres entiers. On trouve, dans tous les

Traités d'Algèbre, une formule pour calculer $\sigma_{n,p}$ au moyen de $\sigma_{n,p-1}, \sigma_{n,p-2}, \ldots, \sigma_{n,1}$. En outre, plusieurs géomètres (*) ont donné diverses expressions de $\sigma_{n,p}$ en fonction explicite de n, mais la loi de formation des coefficients est assez compliquée. Mon but, dans cette Note, est d'exprimer $\sigma_{n,p}$ en fonction de $\sigma_{n,p-2}, \sigma_{n,p-4}, \ldots$, ce qui n'a pas été fait, à ma connaissance, et ce qui me paraît offrir divers avantages, entre autres celui d'abréger les calculs.

Si l'on pose

$$u = e^{\mu x\sqrt{-1}} + e^{(\mu+\alpha)x\sqrt{-1}} + \ldots + e^{(\mu+n\alpha)x\sqrt{-1}},$$

on aura, pour $x = 0$,

$$\left(\frac{d^p u}{dx^p}\right)_0 = (\sqrt{-1})^p \sigma_{n,p}.$$

D'ailleurs, on trouve sans peine

$$u \sin\frac{\alpha x}{2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[e^{\left(\mu+n\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)x\sqrt{-1}} - e^{\left(\mu-\frac{\alpha}{2}\right)x\sqrt{-1}}\right],$$

et en différentiant $(p+1)$ fois par rapport à x les deux membres de cette équation, puis faisant $x = 0$, on aura

$$\begin{aligned}(p+1)\frac{\alpha}{2}\left(\frac{d^p u}{dx^p}\right)_0 \sin\frac{\pi}{2} &+ \frac{(p+1)p}{1.2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\frac{d^{p-1}u}{dx^{p-1}}\right)_0 \sin\frac{2\pi}{2} \\ &+ \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3\left(\frac{d^{p-2}u}{dx^{p-2}}\right)_0 \sin\frac{3\pi}{2} + \ldots \\ &+ (p+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p\left(\frac{du}{dx}\right)_0 \sin\frac{p\pi}{2} + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p+1} u_0 \sin\frac{(p+1)\pi}{2} \\ = \frac{(\sqrt{-1})^p}{2}&\left[\left(\mu+n\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)^{p+1} - \left(\mu-\frac{\alpha}{2}\right)^{p+1}\right].\end{aligned}$$

(*) M. Puiseux, *Journal de M. Liouville*, 1846, p. 477. — M. Pepin, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1856, p. 27. — M. Catalan, même volume, p. 230, et *Mélanges mathématiques*, p. 110.

Substituons à $\left(\frac{d^i u}{dx^i}\right)_0$ sa valeur $(\sqrt{-1})^i \sigma_{n,i}$, remplaçons $\sin \frac{2i\pi}{2}$ par zéro, divisons toute l'équation par $(\sqrt{-1})^p \frac{\alpha}{2}$, nous trouverons enfin :

1° Si p est *pair*,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &(p+1)\sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \sigma_{n,p-2} \\ &\quad + \frac{(p+1)p\ldots(p-3)}{1.2.3.4.5}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 \sigma_{n,p-4} + \ldots + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p \sigma_{n,0} \\ &= \frac{\left(\mu + n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)^{p+1} - \left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right)^{p+1}}{\alpha}; \end{aligned} \right.$$

2° Si p est *impair*,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &(p+1)\sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \sigma_{n,p-2} + \ldots \\ &\quad + (p+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p-1} \sigma_{n,1} \\ &= \frac{\left(\mu + n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)^{p+1} - \left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right)^{p+1}}{\alpha}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les formules qui donnent $\sigma_{n,p}$ en fonction de $\sigma_{n,p-2}$, $\sigma_{n,p-4}$, ...

Il importe d'observer que $\sigma_{n,0}$ est égal, toujours, à $n+1$.

Cas particuliers : 1° Si l'on fait, dans ces formules, $\mu = 0$, $\alpha = 1$, il vient

$$\sigma_{n,p} = 1^p + 2^p + \ldots + n^p,$$

et les équations (1) et (2) donnent la somme des puissances semblables des nombres naturels. Si p est pair,

$$(p+1)\sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\frac{1}{2^2}\sigma_{n,p-2} + \ldots + \frac{1}{2^p}\sigma_{n,0}$$
$$= \frac{(2n+1)^{p+1}+1}{2^{p+1}};$$

si p est impair,

$$(p+1)\sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\frac{1}{2^2}\sigma_{n,p-2} + \ldots$$
$$+ (p+1)\frac{1}{2^{p-1}}\sigma_{n,1} = \frac{(2n+1)^{p+1}-1}{2^{p+1}}.$$

On déduit immédiatement de ces formules les propositions connues : Si l'on exprime $\sigma_{n,p}$ en fonction des puissances de $\left(n+\frac{1}{2}\right)$, l'expression ne contiendra que des puissances impaires, si p est pair, et que des puissances paires, si p est impair; si p est un nombre pair, $\sigma_{n,p}$ est toujours nul pour $n = -\frac{1}{2}$, etc. (*).

2° Faisons $\mu = \frac{\alpha}{2}$, et

$$\Sigma_{n,p} = 1^p + 3^p + 5^p + \ldots + (2n+1)^p,$$

d'où

$$\sigma_{n,p} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p \Sigma_{n,p}.$$

Les formules (1) et (2) se réduisent aux suivantes :

$$(p+1)\Sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\Sigma_{n,p-2} + \ldots + \Sigma_{n,0}$$
$$= 2^p(n+1)^{p+1};$$
$$(p+1)\Sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\Sigma_{n,p-2} + \ldots + (p+1)\Sigma_{n,1}$$
$$= 2^p(n+1)^{p+1},$$

suivant que p est pair ou impair.

(*) *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, p. 350.