Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 415-430
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__415_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 826

(voir 2e série, t. VI, p 478),

PAR M. LUCIEN BIGNON,

a Lima.

Si n est un nombre entier quelconque, l'un des quatre nombres n^2, n^2-1, n^2-4, n^2+3 est divisible par 12, et le quotient marque le nombre des solutions différentes de l'équation indéterminée $x+y+z=n$ en nombres entiers et positifs dont aucun n'est nul. (VACHETTE.)

Si nous représentons par n' un nombre entier quelconque, en y comprenant 0, le nombre n est évidemment de l'une des six formes

$$6n';\quad 6n'+1;\quad 6n'+2;\quad 6n'+3;\quad 6n'+4;\quad 6n'+5,$$

dont les carrés respectifs sont

$$m.12;\; m.12+1;\; m.12+4;\; m.12-3;\; m.12+4;\; m.12+1;$$

en désignant par $m.12$ un multiple de 12.

La première partie du théorème est donc démontrée.

Pour démontrer la seconde, supposons d'abord $n=6n'$. Les solutions de l'équation $x+y+z=n$ qui satisfont à l'énoncé pourront être classées en $\frac{n}{3}$ groupes, comme il suit :

$$1,1,\quad n-2;\quad 2,2,\quad n-4;\ldots;\frac{n}{3}-1,\frac{n}{3}-1,\frac{n}{3}+2;\frac{n}{3},\frac{n}{3},\frac{n}{3}.$$

$$\begin{array}{llll} 1,2, & n-3; & 2,3, & n-5; \\ 1,3, & n-4; & 2,4, & n-6; \end{array}\ldots;\frac{n}{3}-1,\frac{n}{3},\quad \frac{n}{3}+1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$1,\frac{n}{2}-2,\frac{n}{2}+1;\quad 2,\frac{n}{2}-2,\frac{n}{2};$$

$$1,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2};\qquad 2,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1.$$

Le nombre des solutions des 1er et 2e groupes est... $n-3$;
Celui » des 3e et 4e » » ... $n-9$;
....;
Celui » des $\left(\frac{n}{3}-1\right)^{\text{e}}$ et $\left(\frac{n}{3}\right)^{\text{e}}$ » ... 3.

Le nombre total des solutions satisfaisant à l'énoncé est donc la somme de la progression arithmétique de raison 6 :

$$3,9,\ldots,\quad n-15,\quad n-9,\quad n-3,$$

qui se compose de $\frac{n}{6}$ termes. Cette somme est $\frac{n^2}{12}$, ce qui est conforme à l'énoncé.

Supposons maintenant $n=6n'+1$. Le nombre des groupes restera le même, puisque les quotients de $6n'$ et $6n'+1$ par 3 sont égaux; mais il faudra augmenter d'une unité le troisième terme de chaque solution, et chaque groupe de rang impair, d'une solution nouvelle. Le nombre total des solutions sera donc

$$\frac{(n-1)^2}{12}+\frac{n-1}{6}\quad\text{ou}\quad\frac{n^2-1}{12},$$

puisque la quantité que nous représentions par n dans le cas précédent est maintenant $n-1$.

Pour $n = 6n' + 2$, on voit qu'il faut augmenter chaque groupe de rang pair obtenu pour $n = 6n' + 1$ d'une solution nouvelle. Le nombre des solutions sera donc

$$\frac{(n-1)^2-1}{12} + \frac{n-2}{6} = \frac{n^2-4}{12}.$$

Pour $n = 6n' + 3$, il y aura, comme pour les deux cas suivants, un groupe impair de plus, et, comme on doit augmenter d'une solution chaque groupe impair du cas précédent, on aura

$$\frac{(n-1)^2-4}{12} + \frac{n-3}{6} + 1 = \frac{n^2+3}{12}.$$

Pour $n = 6n' + 4$, on augmentera d'une solution chaque groupe pair du cas précédent, ce qui donnera

$$\frac{(n-1)^2+3}{12} + \frac{n-4}{6} = \frac{n^2-4}{12}.$$

Enfin, pour $n = 6n' + 5$, on augmentera d'une solution les $\left(\frac{n-5}{6} + 1\right)$ groupes de rang impair du cas précédent, d'où

$$\frac{(n-1)^2-4}{12} + \frac{n-5}{6} + 1 = \frac{n^2-1}{12}.$$

La question précédente a été résolue aussi par MM. Victor Strekaloff, élève de l'Université de Saint-Pétersbourg; Figa Bartolomeo, de Turin, Bédorez, élève du lycée de Douai.

Question 898

(voir 2e série, t. VIII, p. 45),

PAR M. A. MILLASSEAU,

Élève de Mathematiques spéciales au lycée de Douai (classe de M. Pajnvin).

On donne un cercle C *tangent à une droite* D *en* O. *D'un point* M *de la circonférence, on mène* MA *perpendiculaire à* OD *et l'on prend* AB = AO. *On joint* BM, *et l'on demande l'enveloppe de la droite* BM *quand le point* M *se déplace sur la circonférence. L'enveloppe cherchée admet trois axes de symétrie et trois points de rebroussement remarquables* (*).

(H. BROCARD.)

Prenons pour origine le point O, pour axe des x la droite D, pour axe des y la droite CO.

L'équation du cercle est

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0.$$

Soient (x_1, y_1) les coordonnées du point M : nous avons d'abord la condition

$$x_1^2 + y_1^2 - 2Ry_1 = 0.$$

L'équation de la droite MB est

$$xy_1 + x_1y - 2x_1y_1 = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe de cette droite, nous aurons à éliminer (x_1, y_1) entre les trois équations

$$x_1^2 + y_1^2 - 2Ry_1 = 0,$$
$$y_1x + x_1y - 2x_1y_1 = 0,$$
$$2x_1^2 + 2y_1^2 - xx_1 + (y + 2R)y_1 - 2Ry = 0.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Éliminons d'abord x_1, il nous reste à éliminer y_1 entre les deux équations

$$\begin{aligned} 4y_1^3 - 4Ay_1^2 + By_1 - 2Ry^2 &= 0, \\ 8y_1^3 - 6Ay_1^2 + By_1 - Ry^2 &= 0, \end{aligned}$$

où on a posé

$$\begin{aligned} A &= y + 2R, \\ B &= x^2 + y^2 + 8Ry. \end{aligned}$$

Éliminons successivement le terme en y_1^3 et le terme constant, il nous reste les deux équations

$$\begin{aligned} 2Ay_1^2 - By_1 + 3Ry^2 &= 0, \\ 12y_1^2 - 8Ay_1 + B &= 0. \end{aligned}$$

Éliminons successivement le terme en y_1^2 et le terme constant, nous avons, en égalant les deux valeurs de y_1, l'équation de l'enveloppe

$$(B^2 - 24ARy^2)(4A^2 - 3B) = (AB - 18Ry^2)^2.$$

Développons et réduisons, il reste

$$(x^2+y^2)^2 + 4R(5x^2 - 3y^2)y - 4R^2(x^2 - 12y^2) - 64R^3y = 0.$$

Rapportons cette courbe au point C, il vient

$$(x^2+y^2)^2 + 8R(3x^2 - y^2)y + 18R^2(x^2+y^2) - 27R^4 = 0.$$

Cette équation représente une épicycloïde à trois rebroussements, rapportée au centre du cercle fixe.

L'épicycloïde à trois rebroussements est de quatrième ordre, possède trois points de rebroussement, sommets d'un triangle équilatéral, et les tangentes de rebroussement sont des axes de symétrie. Elle est de troisième classe, ne possède pas de points d'inflexion. Elle possède une seule tangente double qui est la droite de l'infini, et les points de contact sont les points du cercle à l'infini. Elle est inscrite dans le cercle de rayon 3R et est circonscrite au cercle de rayon R.

On peut remarquer le théorème suivant :

Toute courbe de troisième classe ayant pour tangente double la droite de l'infini, et les points de contact étant les points du cercle à l'infini, est une épicycloïde à trois rebroussements.

Question 901

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 45);

PAR M. E. JASSERON,

Élève du lycée de Besançon.

Lorsqu'une ellipse en roulant sans glisser sur une droite a fait un tour entier, l'arc décrit par le foyer est égal à la circonférence ayant pour diamètre le grand axe. (JOS. JOUFFROY.)

Considérons un contour polygonal convexe inscrit dans l'ellipse. Pour chaque sommet on aura la relation

$$\rho + \rho' = 2a.$$

Cela posé, faisons rouler sur la droite le contour polygonal. Soit, à un moment donné, un côté AB sur la droite xy; soit BC le côté adjacent faisant, avec AB ou xy, l'angle θ. Si l'on fait rouler, AB se détachera de xy, et BC, après avoir tourné de θ autour de B comme centre, viendra s'y placer.

Tout point du plan aura décrit un arc égal à $r\theta$, si l'on appelle r sa distance à B. La somme des arcs décrits par les foyers sera $(\rho + \rho')$; et comme cela aura lieu pour tous les points sommets du polygone qui sont tous sur l'ellipse, il s'ensuit que $ra\Sigma\theta$ sera la somme des arcs décrits par les deux foyers. Mais si le polygone a fait un tour entier, $\Sigma\theta = 4$ droits $= 2\pi$ comme somme des angles du polygone.

Alors la somme des deux séries d'arcs droits, par chacun des foyers, sera égale à $4\pi a$.

Cette démonstration étant vraie quels que soient et les côtés et les angles du polygone, elle est encore vraie ainsi que sa conséquence à la limite; c'est-à-dire que la somme des arcs décrits par les deux foyers est égale à $4a\pi$ lorsque l'ellipse aura fait un tour entier. Mais ces arcs sont égaux, puisque les deux foyers sont réciproques; ils sont simplement disposés parallèlement.

Donc l'arc décrit par chaque foyer est égal à $2\pi a$.

C. Q F. D.

Note. — Ont resolu la même question : MM. Double, de Toulon; Alexis Petiot, sous-lieutenant d'artillerie de marine; Alfred Criard; Dauplay; Brocard, de l'École d'Application de Metz.

Question 906

(voir 2e série, t. VIII, p. 40);

PAR M. A. MILLASSEAU,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Douai (classe de M. Painvin).

On donne une ellipse et une hyperbole homofocales dont O *est le centre commun. Par un point quelconque* P *de l'hyperbole, on mène des droites parallèles aux nor-*

males à l'ellipse aux points où elle est coupée par l'hyperbole. Soient H *et* K *les points où ces droites coupent l'hyperbole et* I *le milieu du segment* HK : *démontrer que les deux droites* OP et OI *sont également inclinées sur le grand axe et que le rapport de* OP *à* OI *est constant* (*). (LAGUERRE.)

Soient les deux coniques homofocales

$$\text{Ellipse} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\text{Hyperbole} \quad \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0,$$

$$a_1^2 = a^2 - \lambda, \quad b_1^2 = \lambda - b^2;$$

les coordonnées des points M et N sont

$$\text{M} \begin{cases} x_1 = \dfrac{a a_1}{c}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{b b_1}{c}, \end{cases}$$

$$\text{N} \begin{cases} x_2 = \dfrac{a a_1}{c}, \\[2ex] y_2 = -\dfrac{b b_1}{c}. \end{cases}$$

Deux coniques homofocales sont orthogonales; donc la normale en M à l'ellipse est tangente à l'hyperbole; de même au point N.

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point P :

$$\frac{x_0^2}{a_1^2} - \frac{y_0^2}{b_1^2} - 1 = 0.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Le coefficient angulaire de la tangente en M à l'hyperbole est $\frac{ab_1}{a_1 b}$.

Le coefficient angulaire de la tangente en N à l'hyperbole est $-\frac{ab_1}{a_1 b}$.

Les deux parallèles menées par le point P ont pour équations :

$$\text{PH,}\quad y - y_0 = \frac{ab_1}{a_1 b}(x - x_1);$$

$$\text{PK,}\quad y - y_0 = -\frac{ab_1}{a_1 b}(x - x_0).$$

Les coordonnées du point

$$\text{H sont}\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{(a^2+b^2)x_0 - \frac{2aa_1b}{b_1}y_0}{c^2},\\ y' &= \frac{-(a^2+b^2)y_0 + \frac{2abb_1}{a_1}x_0}{c^2}; \end{aligned}\right.$$

$$\text{K sont}\left\{\begin{aligned} x'' &= \frac{(a^2+b^2)x_0 + \frac{2aa_1b}{b_1}y_0}{c^2},\\ y'' &= \frac{(a^2+b^2)y_0 + \frac{2abb_1}{a_1}x_0}{c^2}. \end{aligned}\right.$$

Les coordonnées du point milieu de KH sont

$$\text{I}\left\{\begin{aligned} 2x &= x' + x'' = 2\frac{a^2+b^2}{c^2}x_0,\\ 2y &= y' + y'' = -2\frac{a^2+b^2}{c^2}y_0. \end{aligned}\right.$$

Le coefficient angulaire de la droite OP est $\frac{x_0}{y_0}$.

Le coefficient angulaire de la droite OI est $-\frac{x_0}{y_0}$.

Ces deux droites sont donc également inclinées sur Ox.

Calculons le rapport $\frac{OP}{OI}$:

$$\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OI}^2}=\frac{x_0^2+y_0^2}{\frac{(a^2+b^2)^2}{c^4}(x_0^2+y_0^2)}=\frac{c^4}{(a^2+b^2)^2}.$$

Donc

$$\frac{OP}{OI}=\text{const.},\quad \frac{OP}{OI}=\frac{c^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2};$$

d'où

$$\frac{OI+OP}{OI-OP}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Question 927

(voir 2e série, t. VIII, p. 144);

PAR M. BURTAIRE,

Maître-auxiliaire au lycée de Nancy.

Former l'équation des coniques qui ont pour centre l'origine des coordonnées et qui passent par deux points : l'un réel ayant pour coordonnées

$$x=a,\quad y=b;$$

l'autre imaginaire ayant pour coordonnées

$$x=a\sqrt{-1},\quad y=-b\sqrt{-1}.$$

Trouver ensuite le lieu des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des Y. (J.-CH. DUPAIN.)

1° L'origine des coordonnées étant un centre, l'équation cherchée est de la forme

$$(1)\qquad Ax^2+Bxy+Cy^2+F=0.$$

Elle doit être satisfaite pour $x = a$, $y = b$ et pour $x = a\sqrt{-1}$, $y = -b\sqrt{-1}$.

De là les deux conditions

$$(2) \qquad Aa^2 + Bab + Cb^2 + F = 0,$$

$$(3) \qquad Aa^2 - Bab + Cb^2 - F = 0.$$

Entre les deux relations précédentes et l'équation (1), nous pouvons éliminer deux paramètres.

A cet effet, en ajoutant ou retranchant successivement (2) et (3), on a

$$\begin{aligned} Aa^2 + Cb^2 &= 0, \\ Bab + F &= 0; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$A = -\frac{cb^2}{a^2}, \quad B = -\frac{F}{ab}.$$

Ces valeurs reportées dans (1), il vient, après avoir posé $\frac{C}{F} = \lambda$,

$$(4) \qquad \lambda b^3 x^2 + axy - \lambda a^2 by^2 - a^2 b = 0$$

pour l'équation demandée.

2° Le coefficient angulaire des tangentes étant $-\frac{f'_x}{f'_y}$ et les tangentes considérées étant parallèles à l'axe des Y, on doit avoir la condition

$$f'_y = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2\lambda aby = 0,$$

d'où

$$\lambda = \frac{x}{2aby}.$$

Cette valeur de λ reportée dans (4) donne l'équation du lieu des contacts

$$a^2 xy^2 - 2a^3 by + b^2 x^3 = 0,$$

courbe du troisième degré ayant pour asymptote l'axe des Y, tangente aux droites $x = \pm a$ aux points $y = \pm b$, passant par les deux points considérés dans l'énoncé, et ayant trois points d'inflexion dont l'un à l'origine. Le centre est à l'origine.

Note. — Ont résolu la même question MM. Garet, de Clermont; Bossut.

Question 930

(voir 1re série, t. VIII, p. 47 et 192),

PAR M. CHARLES CAHEN,
Élève du lycee de Strasbourg.

Si l'on fait sur un plan B *la perspective d'une figure tracée sur un plan* A, *il y a sur ces deux plans deux points correspondants b et a tels, que tout segment de la figure* B *est vu du point b sous le même angle que le segment correspondant de la figure* A *du point a.*

(ABEL TRANSON.)

Soit CD l'intersection des deux plans A et B et soit Sab une droite menée par le point de vue S, qui perce les plans A et B en a et b (*).

Quelle doit être la position de la droite Sab pour que les points a et b jouissent de la propriété énoncée?

Remarquons d'abord que si nous menons par a dans le plan A une perpendiculaire aH et une parallèle aK à CD, l'angle KaH est droit; il faut donc, si l'on mène bR parallèle à CD et si l'on joint bH, que l'angle RbH soit aussi droit, c'est-à-dire que bH soit perpendiculaire sur CD; donc déjà les points a et b ne peuvent se trouver en dehors du plan mené par S perpendiculairement à CD. Supposons donc que Sa soit dans ce plan et soient deux

(*) Le lecteur est prie de faire la figure.

droites correspondantes quelconques aL, bL. Les triangles rectangles aHL, bHL qui ont le côté HL commun devront avoir leurs angles en a et en b égaux; donc $a\mathrm{H} = b\mathrm{H}$, et la droite S$a$ est perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre AB.

D'ailleurs, si la droite Sa est perpendiculaire à ce plan bissecteur, les points a et b jouiront bien de la propriété énoncée, car, si nous considérons deux autres droites correspondantes aL′, bL′, les angles LaL′ et LbL′ sont égaux comme somme ou différence d'angles égaux, $\mathrm{L}a\mathrm{H} + \mathrm{H}a\mathrm{L}'$ et $\mathrm{L}b\mathrm{H} + \mathrm{H}b\mathrm{L}'$.

Comme il y a deux plans bissecteurs, il y a aussi deux couples de points tels que a et b.

Note. — Nous avons reçu une autre solution de M. J.-J.-A. Mathieu, capitaine d'Artillerie, professeur à l'École d'Artillerie de Toulouse.

Question 933

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 240);

PAR M. PREVEREZ,
Élève du Prytanée de la Flèche.

Trouver le lieu du centre d'une ellipse d'une grandeur constante dont le périmètre passe par un point fixe, et dont l'axe focal passe par un autre point fixe;

Discuter la forme du lieu lorsque la distance des points fixes varie de zéro à l'infini;

Ce lieu peut être obtenu en projetant, sur les tangentes d'une ellipse auxiliaire, le point fixe par lequel passe l'axe focal de l'ellipse mobile. (J.-CH. DUPAIN.)

Première partie.

Je prends pour axe des x la droite qui joint les deux points fixes, et je place l'origine au point par lequel passe constamment l'axe focal.

Soient d l'abscisse de A, a, b les deux axes de l'ellipse mobile, x et y les coordonnées d'un point du lieu c. Les conditions de l'énoncé se traduisent par l'équation

$$(1) \qquad \frac{\overline{AB}^2}{b^2} + \frac{\overline{CB}^2}{a^2} - 1 = 0.$$

Les équations des deux droites oc, AB sont :

$$Yx - Xy = 0,$$
$$Yy + Xz - dx = 0.$$

La condition (1) devient alors

$$\frac{d^2y^2}{b^2(x^2+y^2)} + \frac{(y^2+x^2-dx)^2}{a^2(x^2+y^2)} - 1 = 0.$$

C'est l'équation du lieu. Elle peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad (y^2+x^2-dx)^2 = a^2x^2 + a^2y^2 - a^2y^2\frac{d^2}{b^2}.$$

Cette équation transformée en coordonnées polaires devient

$$\rho = d\cos\omega \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - d^2\sin^2\omega} = d\cos\omega \pm \rho_1.$$

La courbe a pour diamètre le cercle décrit sur oA comme diamètre.

Les coefficients angulaires des tangentes à l'origine sont donnés par la formule

$$\lim\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{d^2-a^2}{b^2-d^2}\frac{b^2}{a^2},$$

en égalant à zéro dans l'équation (2) l'ensemble des termes de moindre degré. Elles ne seront réelles que si l'on a

$$a^2 > d^2 > b^2;$$

car nous avons supposé $a > b$.

Examinons maintenant les différentes formes du lieu quand d varie de zéro à l'infini.

$$d = 0.$$

On a le cercle $\rho = a$. Ce résultat était facile à prévoir d'après la génération même du lieu.

$$1^\circ \quad d < b.$$

Il n'y a pas de tangentes à l'origine. La valeur de ρ ne s'annule jamais.

$$2^\circ \quad d = b.$$

La courbe se réduit à deux cercles.

$$\rho = d\left(1 \pm \frac{a}{d}\right)\cos\omega.$$

$$3^\circ \quad a > d > b.$$

Les tangentes à l'origine sont réelles. La valeur de ρ, s'annule pour $\sin^2\omega = \frac{b^2}{d^2}$.

$$4^\circ \quad d > a.$$

Les tangentes à l'origine redeviennent imaginaires, et la courbe prend une forme analogue à la première trouvée; mais elle ne coupe plus l'axe des y.

Quand d devient infini, la courbe se réduit au lieu

$$a^2y^2 + b^2x^2 = 0,$$

c'est-à-dire à l'origine. On voit en effet que quand les tangentes à l'origine sont imaginaires, ce point est un point isolé. Quand d est infini, le lieu réel est transporté à l'infini. Il ne reste plus que le point isolé.

Deuxième partie.

Par le point C du lieu, je mène une perpendiculaire CK à Co. Cherchons l'enveloppe de CK.

CK a pour équation

$$x\cos\omega + y\sin\omega = o\mathrm{C}$$

ou

$$x\cos\omega + y\sin\omega = d\cos\omega \pm \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}}\sin\omega,$$

ou

$$(x - d)\cos\omega + y\sin\omega = \pm\sqrt{\cos^2\omega + \sin^2\omega\left(1 - \frac{d^2}{b^2}\right)}.$$

Posons $\tan\omega = \mu$. Nous aurons enfin

$$(x - d) + y\mu = \pm\sqrt{1 + \mu^2\left(1 - \frac{d^2}{b^2}\right)}.$$

Éliminant μ entre cette équation et sa dérivée par rapport à μ, on trouve

$$\frac{(x-d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{b^2}(b^2 - d^2)} = 1;$$

donc le lieu du point C est la podaire de l'origine par rapport à cette ellipse.

Note. — Ont résolu la même question : MM. Floquet, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Darboux); Desmartres; Bedorrez, élève du lycée de Douai; Brocard, sous-lieutenant du Génie, élève à l'École d'Application de Metz; Niébylowski, élève de l'École Normale.