NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. DE CAMPOUX

Des invariants au point de vue des mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 395-406

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__395_0>

DES INVARIANTS AU POINT DE VUE DES MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

Par M. P. DE CAMPOUX.

I. — *Géométrie analytique à deux dimensions.*

1° *Transformation de l'équation du second degré en coordonnées rectangulaires dans le cas des coniques à centre rapportées à ce centre.*

Nous appellerons *invariant* toute fonction des coefficients de l'équation du second degré qui ne change pas de valeur dans la transformation des coordonnées. Ainsi tout le monde sait que si dans l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$$

je substitue, au premier membre, à la place de x et de y,

$$x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \quad \text{et} \quad x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

de façon qu'il devienne

$$ax'^2 + bx'y' + cy'^2,$$

j'ai la relation

$$a + c = A + C.$$

Je dirai alors que $A + C$ est un invariant dans le cas où l'on passe d'axes rectangulaires à des axes rectangulaires ayant même origine.

Je vais m'occuper, dans le cas des coordonnes rectangulaires de même origine, de la recherche des invariants.

Soit

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$$

l'équation d'une conique à centre rapportée à ce centre. On peut toujours, comme on le sait, en faisant tourner les axes d'un angle convenable, ramener l'équation à la forme

$$Mx^2 + Ny^2 + F = 0.$$

C'est de cette équation simplifiée que nous partirons. Si nous faisons tourner les axes d'un angle α arbitraire et que nous désignions par x' et y' les nouvelles coordonnées, nous aurons

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Le premier membre de l'équation devient

$$M(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)^2 + N(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)^2 + F,$$

c'est-à-dire de la forme

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F$$

où

(1) $$A = M \cos^2\alpha + N \sin^2\alpha,$$

(2) $$B = 2 \sin\alpha \cos\alpha (N - M),$$

(3) $$C = M \sin^2\alpha + N \cos^2\alpha.$$

Les invariants, s'ils existent, fournissent des relations entre A, B, C et les constantes M et N ; c'est donc dans les résultats de l'élimination de α entre les trois équations qui donnent A, B et C que nous devrons chercher les invariants. Ceci nous montre qu'il ne saurait y avoir plus de deux invariants, car chaque invariant fournit une relation indépendante de α et avec ces trois équations on ne saurait former plus de deux équations distinctes ne contenant pas α. Faisons l'élimination de α entre ces trois équations.

Additionnant les équations (1) et (3), nous avons

$$A + C = M + N.$$

Nous voyons que l'une des équations résultant de l'élimination de α fournit immédiatement un invariant, et que dans la transformation en question la somme des coefficient des carrés des variables est constante.

Cherchons maintenant la seconde équation fournie par l'élimination de α entre les trois équations.

Les équations (1) et (3) résolues par rapport à $\sin^2\alpha$ et à $\cos^2\alpha$ donnent

$$(4) \qquad \sin^2\alpha = \frac{CM - AN}{M^2 - N^2},$$

$$(5) \qquad \cos^2\alpha = \frac{AM - CN}{M^2 - N^2}.$$

Élevant au carré les deux membres de l'équation (2) et remplaçant $\sin^2\alpha$ et $\cos^2\alpha$ par leurs valeurs tirées des équations (4) et (5), on aura

$$(6) \qquad B^2 = \frac{4(CM - AN)(AM - CN)(N - M)^2}{(M^2 - N^2)^2}.$$

Supprimant le facteur commun $(N - M)^2$ et multipliant les deux membres par $(N + M)^2$, il vient

$$(7) \qquad B^2(M + N)^2 = 4(CM - AN)(AM - CN).$$

Développant le second membre, on le met aisément sous la forme

$$(8) \qquad 4[AC(M^2 + N^2) - MN(A^2 + C^2)].$$

Or

$$A^2 + C^2 = (A + C)^2 - 2AC$$

et, comme $A + C = M + N$, d'après ce que nous avons démontré,

$$A^2 + C^2 = (M + N)^2 - 2AC.$$

Remplaçant $A^2 + C^2$ par cette valeur dans l'expression (8), nous avons

$$4[AC(M + N)^2 - MN(M + N)^2]$$

ou

$$4(M + N)^2(AC - MN).$$

L'équation (7) se transforme donc dans l'équation

$$(9) \qquad B^2(M + N)^2 = 4(M + N)^2(AC - MN).$$

Je supprime le facteur $(M + N)^2$ commun aux deux membres, et j'ai

$$B^2 = 4AC - 4MN$$

ou

$$B^2 - 4AC = -4MN.$$

Cette seconde équation indépendante de α montre que $B^2 - 4AC$ est un invariant. Si l'on passe d'un système rectangulaire ayant pour origine le centre à un autre système rectangulaire de même origine, le binôme $B^2 - 4AC$ conservera la même valeur; car en revenant du système où les axes de la courbe sont les axes de coordonnées au système d'axes qui font avec les premiers un angle égal à α ou à celui des axes qui font avec les premiers un angle α', on aura

$$B^2 - 4AC = -4MN$$

et

$$B'^2 - 4A'C' = -4MN;$$

donc

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'.$$

Nous avons donc finalement pour invariants

$$A + C \quad \text{et} \quad B^2 - 4AC.$$

Il ne saurait y en avoir d'autres distincts; nous l'avons démontré.

2° *Interprétation géométrique des invariants.*

Considérons d'abord le premier, $A + C$.

Dans l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0,$$

si je fais $y = 0$, j'ai

$$A = -\frac{F}{x^2};$$

donc A est proportionnel à l'inverse du carré du rayon a' compté sur l'axe des x; de même B est proportionnel à l'inverse du carré du rayon b' compté sur l'axe des y. Or

$$A + C = M + N;$$

donc

$$-\frac{F}{a'^2} - \frac{F}{b'^2} = -\frac{F}{a^2} - \frac{F}{b^2}$$

ou

$$(1) \qquad \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Or

$$\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} = \frac{a'^2 + b'^2}{a'^2 b'^2},$$

et si $OA' = a'$, $OB' = b'$, $A'B' = c'$ dans le triangle rectangle $OA'B'$, on aura

$$\frac{\overline{A'B'}^2}{4S^2}$$

pour premier membre de l'équation (1), S représentant $\frac{1}{2}ab$, c'est-à-dire la surface du triangle $OA'B'$. Or

$S = \frac{1}{2} A'B' \times OH'$ en prenant $A'B'$ pour base et OH' pour hauteur; donc l'invariant est égal à $\frac{1}{\overline{OH'}^2}$.

Par conséquent, cette propriété des coefficients

$$A + C = \text{const.}$$

signifie que les cordes qui dans l'ellipse sont vues du centre sous un angle droit enveloppent un cercle.

Considérons maintenant le second invariant $B^2 - 4AC$.

Je trace l'ellipse représentée par l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0.$$

Le diamètre OA des cordes parallèles à l'axe des x a pour équation

$$f'_x = 0$$

ou

$$2Ax + By = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{B}{2A}y;$$

portant cette valeur de x dans l'équation de la courbe, on a

$$y^2 = \frac{-4AF}{4AC - B^2}.$$

Or

$$A = -\frac{F}{\overline{OB}^2}:$$

remplaçant A par cette valeur, on obtient

$$y^2 = \overline{AP}^2 = +\frac{4F^2}{\overline{OB}^2(4AC - B^2)};$$

d'où

$$\overline{AP}^2 . \overline{OB}^2 = \frac{4F^2}{4AC - B^2}.$$

Or OB et AP sont la base et la hauteur du parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres conjugués OA et OB. Donc le carré de ce parallélogramme est constant, c'est-à-dire que le parallélogramme est constant. On trouve ainsi le second des théorèmes d'Apollonius.

3° *De l'équation en λ au point de vue des invariants.*

Si je considère l'équation en λ, il est aisé de reconnaître que les racines de cette équation sont des invariants, c'est-à-dire que si l'on connaît ces racines en formant l'équation du troisième degré fournie en rapportant la courbe à certains axes, ces mêmes racines conviendront à l'équation obtenue en rapportant la courbe à d'autres axes. (Nous supposerons ici les axes rectangulaires et d'origine quelconque.)

En effet, soit $F = 0$, $F' = 0$ les équations des deux coniques et λ_1 une racine de l'équation en λ, $F + \lambda_1 F' = 0$ représentera alors un système de droites réelles ou imaginaires et $F + \lambda_1 F'$ pourra se mettre sous la forme $mX^2 + nY^2$; on aura donc

$$F + \lambda_1 F' = mX^2 + nY^2,$$

m et n étant des constantes, et X et Y des fonctions linéaires des coordonnées.

Je change de coordonnées; F se transforme identiquement en f, si $f = 0$ est l'équation de la première conique rapportée au second système; F' se transforme en f', $f' = 0$ représentant l'équation de la seconde conique rapportée au second système; X devient x et Y, y. La relation

$$F + \lambda_1 F' = mX^2 + nY^2$$

devient

$$f + \lambda_1 f' = mx^2 + ny^2;$$

donc λ_1 est une constante telle, que la courbe représentée par l'équation $f + \lambda_1 f' = 0$ est une conique passant par l'intersection des deux courbes $f = 0$, $f' = 0$ et dont l'équation peut se mettre sous la forme $mx^2 + ny^2 = 0$; c'est donc un système de droites réelles ou imaginaires, et λ_1 est une racine de la nouvelle équation en λ; on démontrerait de même pour les deux autres racines. Donc l'équation en λ conserve les mêmes racines lorsqu'on change de système de coordonnées.

L'équation en λ provenant de la combinaison des deux équations

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

est

$$\begin{aligned}(A + \lambda a)(E + \lambda e)^2 &+ (C + \lambda c)(D + \lambda d)^2 \\ &- (B + \lambda b)(D + \lambda d)(E + \lambda e) \\ &+ (F + \lambda f)(B + \lambda b)^2 - 4(A + \lambda a)(C + \lambda c)(F + \lambda f) = 0.\end{aligned}$$

Or cette équation n'a pas l'unité pour premier terme, de telle sorte que les racines pourraient ne pas changer et que les termes pourraient être cependant altérés par la transformation des coordonnées. Je veux montrer que les coefficients demeurent aussi les mêmes. Considérons le coefficient du premier terme qui s'obtient en faisant λ infini dans le premier membre de l'équation, c'est-à-dire

$$ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - 4ac).$$

Je dis que c'est un invariant, et, de plus, que c'est un invariant quel que soit le système de coordonnées rectangulaires d'origine quelconque.

Cette proposition peut s'établir d'une façon bien simple.

Pour cela, partons de l'équation

$$Mx^2 + Ny^2 + F = 0.$$

Si nous passons de cette équation à l'équation de la courbe rapportée à d'autres axes rectangulaires de même origine

$$(1) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + F = 0,$$

il est visible que l'expression

$$ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - 4ac)$$

se réduit ici à $-4MNF$, car les trois premiers termes sont nuls et $f = F$, $b^2 - 4ac = -4MN$.

Passons maintenant à d'autres axes rectangulaires d'origine quelconque.

Pour cela, posons

$$x = x' - p,$$
$$y = y' - q,$$

$-p$ et $-q$ seront les coordonnées de la nouvelle origine par rapport au centre, et par suite p et q seront les coordonnées du centre par rapport à cette origine.

Faisant la substitution de $x' - p$ à x et de $y' - q$ à y dans le premier membre de l'équation (1), nous aurons

$$\begin{gathered} ax'^2 + bx'y' + cy'^2 - (2ap + bq)x' - (bp + 2cq)y' \\ + ap^2 + bpq + cq^2 + F; \end{gathered}$$

de telle sorte que

$$d = -(2ap + bq),$$
$$e = -(bp + 2cq),$$
$$f = ap^2 + bpq + cq^2 + F.$$

Or, si je représente par Δ l'expression

$$\Delta = ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - 4ac)$$

et par Δ'_p la dérivée par rapport à p de Δ, j'aurai

$$\Delta'_p = -2acb + b^2d + 2abe - 4acd + (b^2 - 4ac)(2ap + bq);$$

en mettant $2a$ en facteur dans le troisième terme, le quatrième et les termes $(b^2-4ac)\,2ap$, et b en facteur dans les termes restants, nous aurons

$$\Delta'_p = 2a[be - 2cd + p(b^2 - 4ac)] \\ + b[bd - 2ae + q(b^2 - 4ac)].$$

Or p et q étant les coordonnées du centre de la courbe

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

on aura, par des formules connues,

$$p = \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac},$$

$$q = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac},$$

et par conséquent

$$be - 2cd + p(b^2 - 4ac) = 0,$$

$$bd - 2ae + q(b^2 = 4ac) = 0;$$

donc

$$\Delta'_p = 0;$$

de même, on verrait par un calcul analogue que

$$\Delta'_q = 0.$$

Donc Δ, ne variant ni quand p varie, ni quand q varie, est indépendant de p et de q. Donc

$$ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - 4ac) = -4\mathrm{MNF},$$

c'est donc un invariant.

Ainsi l'équation en λ

$$\mathrm{R}\lambda^3 + \mathrm{S}\lambda^2 + \mathrm{T}\lambda + \mathrm{U} = 0$$

a ses racines indépendantes du système de coordonnées; de plus, R ne varie pas. Donc $-\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}, \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}, -\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{R}}$, c'est-à-dire la somme des racines, la somme des produits deux à deux de ces racines et leurs produits sont des invariants, et, comme R est invariable, S, T, U ne varieront pas non plus. Donc l'équation en λ a non-seulement ses racines, mais aussi ses coefficients invariables.

4° *Des invariants dans le cas d'une origine quelconque.*

Soit
$$Mx^2 + Ny^2 + F = 0$$
l'équation d'une conique à centre rapportée à ce centre; je la reporte à une origine quelconque et à des axes rectangulaires quelconques. Alors
$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$
l'origine restant la même. L'équation devient alors
$$aX^2 + bXY + cY^2 + F = 0.$$
L'origine étant le point dont les coordonnées sont p et q, on aura
$$X = x' + p,$$
$$Y = y' + q,$$
et l'équation précédente se transforme dans l'équation
$$ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + (2ap + bq)x'$$
$$+ (bp + 2cq)y' + ap^2 + bpq + cq^2 + F = 0;$$
alors
$$d = 2ap + bq,$$
$$e = bp + 2cq,$$
$$f = ap^2 + bpq + cq^2 + F$$
et
$$a = M\cos^2\alpha + N\sin^2\alpha,$$
$$b = 2\sin\alpha\cos\alpha(M - N),$$
$$c = M\sin^2\alpha + N\cos^2\alpha.$$

Les invariants ne peuvent se trouver que dans le résultat de l'élimination de α, p, q, entre ces six équations. Or il ne peut y avoir plus de trois équations distinctes ne renfermant pas α, p, q; car s'il y avait quatre relations distinctes, j'imagine la courbe rapportée à des axes rectangulaires tracés dans le plan $o'X'$, $o'Y'$; son équation serait de la forme

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0.$$

On peut toujours choisir F de telle façon que si l'on applique les formules de transformation au changement d'axes dans lequel les nouveaux axes de coordonnées sont les axes mêmes de la courbe, on arrive à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ (cas de l'ellipse).}$$

Alors ces quatre relations distinctes entre A, B, C,... et les axes a et b de l'ellipse que nous supposerons connus et les deux relations fournies par deux points donnés de l'ellipse suffiraient pour déterminer les coefficients de la courbe.

Donc il ne peut y avoir plus de trois équations distinctes, et par conséquent plus de trois invariants distincts; or nous en connaissons trois, savoir :

$$a + c, \quad b^2 - 4ac, \quad ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - 4ac)$$

(*voir* les nos 1° et 3°). Donc il n'y a que trois invariants dans la transformation générale.

(*La suite prochainement.*)