Nouvelles annales de mathématiques

E. Combescure

Note sur le pendule conique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 388-394

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__388_1>

NOTE SUR LE PENDULE CONIQUE;

PAR M. E. COMBESCURE,
Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Dans l'un des derniers numéros des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* M. Resal a présenté une Note relative au mouvement de rotation de l'ellipse très-petite que décrit un pendule conique dans le vide. La première solution de ce problème a été donnée, si je ne me trompe, par M. Airy dans le *Journal astronomique de Londres* (1851 et avant); seulement l'analyse de l'habile astronome exige la distinction des deux cas, savoir : celui où l'ellipse est presque circulaire et celui où elle est très-allongée. J'avais communiqué en 1853, à M. Gond, de Cambridge (États-Unis), une solution du même problème, et cet éminent astronome m'ayant appris que la question avait été traitée par M. Airy, je n'avais plus songé à publier ma solution. Cependant la marche que j'avais suivie me paraît plus simple et plus uniforme que celle de M. Airy. Comme elle n'est guère plus compliquée que celle qui se rapporte à la première approximation et qu'on expose dans les traités classiques, peut-être y aurait-il quelque intérêt à la faire connaître. Je l'avais communiquée en 1856 à M. Roche, qui venait de traiter, à un autre point de vue, le mouvement circulaire du pendule pour un écart initial quelconque, et je n'y aurais plus pensé sans la Note de M. Resal. Cette Note a été l'objet d'une réclamation de M. Tissot, qui a traité, comme on sait, le mouvement pendulaire dans sa généralité. Mais il faut convenir que cette solution générale, précisément à cause de sa généralité, laisse un peu caché le fait caractéristique naissant de la deuxième approximation, savoir : le mouvement de rotation *uniforme* de l'ellipse *invariable* et la loi simple qui le régit. La même chose peut se dire par suite de l'élégante solution qu'a publiée dernièrement M. Schlaefli dans le journal de MM. Brioschi et Cremona. Enfin on sait que la deuxième approximation du mouvement pendulaire a été entreprise par Lagrange et rectifiée par M. Bravais (1854); mais il me semble que mon calcul de 1853 est plus simple, et plus propre en même temps à mettre en évidence les phénomènes dynamiques révélés par la deuxième approximation.

a est la longueur du pendule, N la pression, $K^2 = 2gh'$ la vitesse initiale qui répond à $z = h$, les z étant comptés à partir du point le plus bas; v désignant la vitesse, on a

$$v^2 = 2g(2\varepsilon - z), \quad N = \frac{v^2 + g(a-z)}{a} = g + 4g\frac{\varepsilon}{a} - 3g\frac{z}{a},$$

où $\varepsilon = \frac{1}{2}(h + h')$. Si l'on fait, pour abréger,

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} = \tau, \quad \frac{z}{a} = \zeta, \quad \frac{\varepsilon}{a} = \alpha,$$

l'équation du mouvement vertical, savoir :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = N\left(1 - \frac{z}{a}\right) - g,$$

peut s'écrire

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + 4(1+\alpha)\zeta = 4\alpha + 3\zeta^2.$$

En posant $\zeta = \lambda + u$ et prenant pour λ la racine de l'ordre α de l'équation

$$\lambda^2 - \frac{4}{3}(1+\alpha)\lambda + \frac{4\alpha}{3} = 0,$$

l'équation précédente devient

$$(1) \qquad \frac{d^2 u}{d\tau^2} + 4\mu^2 u = 3u^2,$$

où

$$\mu^2 = 1 + \alpha - \frac{3}{2}\lambda.$$

Quand on néglige les quantités de l'ordre a^2 ou u^2, on a, pour première valeur approchée,

$$u_1 = \mathrm{A}\cos 2\mu\tau + \mathrm{B}\sin 2\mu\tau.$$

Faisant

$$u = u_1 + u',$$

u' étant de l'ordre α^2, et négligeant u, u', u'^2, qui sont de l'ordre α^3, α^4, il vient, par la substitution dans (1),

$$\begin{aligned}\frac{d^2u'}{d\tau^2} + 4\mu^2 u' &= 3u_1^2 \\ &= \frac{3(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)}{2} + \frac{3(\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2)}{2}\cos 4\mu\tau + 3\mathrm{AB}\sin 4\mu\tau.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$u' = \frac{3(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)}{8\mu^2} + \mathrm{M}\cos 4\mu\tau + \mathrm{N}\sin 4\mu\tau,$$

on trouve tout de suite

$$\mathrm{M} = -\frac{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2}{8\mu^2}, \quad \mathrm{N} = -\frac{\mathrm{AB}}{4\mu^2}.$$

Les coefficients de u' étant de l'ordre α^2, on peut y remplacer μ^2 par 1.

En supposant $\frac{dz}{dt} = 0$ pour $t = 0$ la seconde valeur approchée de ζ, savoir :

$$\zeta = \lambda + u_1 + u',$$

fait voir que $B = 0$, l'hypothèse $A = 2$ ne pouvant être adoptée ici. Et, comme $z = h$ pour $t = 0$, il en résulte

$$\left(\frac{A}{2} + 1\right)^2 = 1 + \eta - \lambda,$$

où $\eta = \frac{h}{a}$ $\left(\text{de même } \eta' = \frac{h'}{a}\right)$; d'ailleurs

$$\lambda = \frac{2}{3}\left[1 + \alpha - (1 - \alpha + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$= \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + \ldots = \frac{\eta + \eta'}{2} - \frac{(\eta + \eta')^2}{16} + \ldots.$$

Donc, à l'approximation où l'on s'arrête,

$$\zeta = \frac{\eta + \eta'}{2} - \frac{(\eta + \eta')^2}{16} + \frac{(\eta - \eta')^2}{8}$$
$$+ \left(\frac{\eta - \eta'}{2} + \frac{\eta\eta'}{4}\right)\cos 2\mu\tau - \frac{(\eta - \eta')^2}{16}\cos^2 2\mu\tau.$$

Les valeurs extrêmes de ζ, lesquelles répondent à $\tau = 0$, $\mu\tau = \frac{\pi}{2}$, sont η et $\eta_1 = \eta'\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)$.

En introduisant dans l'expression de ζ

$$\eta' = \eta_1\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^{-1} = \eta_1\left(1 + \frac{\eta}{2}\right),$$

il vient

$$(2) \qquad \zeta = \eta\cos^2\mu\tau + \eta_1\sin^2\mu\tau + \frac{(\eta - \eta_1)^2}{4}\sin^2\mu\tau\cos^2\mu\tau.$$

Soit ar le rayon vecteur de la projection horizontale du mobile, en sorte que

$$r^2 = 2\zeta - \zeta^2,$$

on a, d'après la dernière équation,

$$(3)\qquad r^2 = \rho^2 \cos^2 \mu\tau + \rho_1^2 \sin^2 \mu\tau + \frac{3}{8}(\rho^2 - \rho_1^2)^2 \sin^2 \mu\tau \cos^2 \mu\tau,$$

ρ, ρ_1 étant les valeurs extrêmes de r. On peut remarquer que, si $\rho = \rho_1$, la trajectoire se réduit à un cercle, comme dans la première approximation.

La vitesse initiale étant supposée perpendiculaire au rayon vecteur initial ρ, l'équation des aires peut s'écrire

$$d\omega = \sqrt{\eta\eta_1}\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2 - \zeta}\right) d\tau;$$

r étant exact jusqu'aux termes de l'ordre r^2 ou ζ, et la parenthèse étant multipliée par $\sqrt{\eta\eta_1}$, qui est de l'ordre de ζ, on ne doit conserver dans ω que des termes de l'ordre de ζ.

On peut donc prendre

$$d\omega = \sqrt{\eta\eta_1}\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2}\right) d\tau.$$

L'expression (2) de ζ peut s'écrire

$$\zeta = 1 + \frac{\eta + \eta_1}{2} + \frac{(\eta - \eta_1)^2}{16} - \left(1 - \frac{\eta - \eta_1}{4} \cos 2\mu\tau\right)^2,$$

d'où, en décomposant en deux facteurs,

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{2\nu}\,\frac{1}{\nu - 1 + \dfrac{\eta - \eta_1}{4}\cos 2\mu\tau} + \frac{1}{2\nu}\,\frac{1}{\nu + 1 - \dfrac{\eta - \eta_1}{4}\cos 2\mu\tau},$$

$$\nu^2 = 1 + \frac{\eta + \eta_1}{2} + \frac{(\eta - \eta_1)^2}{16}.$$

En développant le second terme de $\frac{1}{\zeta}$ suivant les puissances croissantes de $(\eta - \eta_1)$, par les mêmes raisons d'approximation que ci-dessus, on pourra réduire le développement à son premier terme, dans lequel terme d'ailleurs ν pourra être remplacé par l'unité. D'après cela, on aura

$$d\omega = \frac{1}{\mu\nu\sqrt{\left(1-\frac{\eta}{4}\right)\left(1-\frac{\eta_1}{4}\right)}}\,\frac{d(p\tang\mu\tau)}{1+p^2\tang^2\mu\tau} + \frac{3\sqrt{\eta\eta_1}}{4}\,d\tau,$$

où

$$p = \sqrt{\frac{\eta_1\left(1-\frac{\eta}{4}\right)}{\eta\left(1-\frac{\eta_1}{4}\right)}}.$$

Aux quantités près de l'ordre η^2, on a

$$\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{\eta+\eta_1}{8},\quad \frac{1}{\nu} = 1 - \frac{\eta+\eta_1}{4},\quad \frac{1}{\mu\nu} = 1 - \frac{\eta+\eta_1}{8},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\eta}{4}\right)\left(1-\frac{\eta_1}{4}\right)}} = 1 + \frac{\eta+\eta_1}{8}.$$

Donc le coefficient du premier terme de $d\omega$ se réduit à l'unité, aux quantités près de l'ordre η^2. Par conséquent, en intégrant,

$$(4)\qquad \omega = \arc\tang(p\tang\mu\tau) + \frac{3\sqrt{\eta\eta_1}}{4}\,\tau,$$

d'où

$$\tang\mu\tau = \frac{1}{p}\tang\Omega,$$

en posant

$$\Omega = \omega - \frac{3\rho\rho_1}{8}\,\tau.$$

A cause de

$$p = \frac{\rho_1}{\rho}\sqrt{\frac{1-\frac{3}{8}\rho^2}{1-\frac{3}{8}\rho_1^2}},$$

si l'on fait, pour un moment,

$$\rho^2 \sin^2 \Omega + \rho_1^2 \cos^2 \Omega = \Theta^2,$$

on aura

$$\sin^2 \mu\tau = \frac{\rho^2 \sin^2 \Omega}{\Theta^2} + \frac{3}{8} \frac{\rho^2 \rho_1^2 (\rho^2 - \rho_1^2) \sin^2 \Omega \cos^2 \Omega}{\Theta^4},$$

$$\cos^2 \mu\tau = \frac{\rho_1^2 \cos^2 \Omega}{\Theta^2} - \frac{3}{8} \frac{\rho^2 \rho_1^2 (\rho^2 - \rho_1^2) \sin^2 \Omega \cos^2 \Omega}{\Theta^4};$$

et, en substituant dans (3),

$$r^2 = \frac{\rho^2 \rho_1^2}{\Theta^2},$$

en négligeant les quantités d'ordre supérieur à ρ^4.

Il résulte de là que, *par rapport à l'axe polaire doué du mouvement angulaire uniforme* $\frac{3\rho\rho_1}{8}\tau$, *la trajectoire horizontale est une ellipse invariable aux axes* ρ, ρ_1. La durée du passage du pendule d'un sommet au sommet diamétralement opposé sur l'ellipse mobile étant

$$T = \frac{\pi}{\mu}\sqrt{\frac{a}{g}},$$

et celle d'une révolution entière du grand axe

$$\mathfrak{T} = \frac{16\pi}{3\rho\rho_1}\sqrt{\frac{a}{g}},$$

on a

$$\frac{\mathfrak{T}}{T} = \frac{4\mu}{3}\frac{4a^2}{AB},$$

A, B étant les demi-grands axes de l'ellipse. On peut remarquer que $\frac{4a^2}{AB}$ est le rapport de la surface de la sphère pendulaire à l'aire de l'ellipse. D'où résulte un énoncé géométrique assez simple.