

A. GENOCCHI

**Sur le passage des différences aux
différentielles**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 8
(1869), p. 385-388

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8_385_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE PASSAGE DES DIFFÉRENCES AUX DIFFÉRENTIELLES ;

PAR M. A. GENOCCHI,

Professeur de l'Université de Turin.

Les raisonnements par lesquels on démontre, même dans les Traités les plus recommandables de calcul différentiel, le théorème général $\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{d^n y}{dx^n}$ me semblent peu satisfaisants. On s'appuie sur un lemme d'après lequel la dérivée partielle $\varphi'_x(x, \alpha)$ d'une fonction de deux variables qui est toujours nulle pour $\alpha = 0$ serait nulle aussi pour $\beta = 0$, et l'on déduit ce lemme de la relation connue

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h).$$

Mais, en examinant la démonstration de cette relation, on ne voit pas clairement comment elle peut avoir lieu dans le cas du lemme, car la plupart des considérations qu'on emploie deviennent alors inapplicables; d'un autre côté, dans l'énoncé du lemme, il ne faudrait pas parler des valeurs des fonctions $\varphi(x, \alpha)$, $\varphi'_x(x, \alpha)$, dans le cas de $\alpha = 0$; mais de leurs *limites*, et pour l'appliquer, il faudrait démontrer que toutes les conditions sous lesquelles il subsiste se trouvent vérifiées, ce qu'on ne fait pas.

Or le théorème dont il s'agit peut être établi d'une manière rigoureuse et fort simple, en supposant même, pour plus de généralité, que les accroissements successifs de x soient des quantités égales ou inégales h, h_1, h_2 , etc.

Soit $y = f(x)$, $\Delta y = f(x + h) - f(x)$, en prenant les dérivées, on aura

$$\frac{d(\Delta y)}{dx} = f'(x + h) - f'(x) = \Delta f'(x) = \Delta \left(\frac{dy}{dx} \right),$$

et de là on tirera, pour n quelconque,

$$\Delta^n \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(\Delta^n y)}{dx},$$

car, en admettant cette équation et prenant les différences des deux membres, il vient

$$\Delta^{n+1} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \Delta \left[\frac{d(\Delta^n y)}{dx} \right] = \Delta \left(\frac{dz}{dx} \right),$$

où l'on a fait $z = \Delta^n y$, et, comme

$$\Delta \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{d(\Delta z)}{dx} = \frac{d(\Delta^{n+1} y)}{dx},$$

il s'ensuit

$$\Delta^{n+1} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(\Delta^{n+1} y)}{dx},$$

de manière que l'équation, si elle a lieu pour l'indice n , a lieu aussi pour l'indice $n + 1$.

Maintenant, ε étant une quantité infiniment petite avec h , on a par définition

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon,$$

si h et Δy désignent les accroissements correspondants de x et y . En faisant $\frac{\Delta y}{h} = y_1$, $\frac{dy}{dx} = y'$, et appelant h_1 un deuxième accroissement de x , on aura pareillement

$$\frac{\Delta y_1}{h_1} = \frac{dy_1}{dx} + \varepsilon_1, \quad \frac{\Delta y'}{h_1} = \frac{dy'}{dx} + \varepsilon',$$

où ε et ε' sont des quantités infiniment petites avec h ; mais, d'après ce qu'on a démontré,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{h} \frac{d(\Delta y)}{dx} = \frac{1}{h} \Delta \left(\frac{dy}{dx} \right),$$

(387)

ou

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{\Delta y'}{h};$$

donc

$$\frac{\Delta y_1}{h_1} = \frac{dy'}{dx} + \varepsilon' + \varepsilon_1,$$

savoir :

$$\frac{\Delta^2 y}{h h_1} = \frac{d^2 y}{dx^2} + \varepsilon' + \varepsilon_1,$$

d'où, en passant à la limite pour $h = 0$ et $h_1 = 0$, on déduit

$$\lim \left(\frac{\Delta^2 y}{h h_1} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

On peut s'élever aux différences et dérivées d'ordres supérieurs pour établir la formule générale

$$\lim \left(\frac{\Delta^n y}{h h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \right) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

En effet, si cette formule est vraie pour l'ordre n , on pourra écrire

$$\frac{\Delta^n y}{h h_1 \dots h_{n-1}} = \frac{d^n y}{dx^n} + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit en même temps que les accroissements h, h_1, \dots, h_{n-1} ; soit $\frac{\Delta^n y}{h h_1 \dots h_{n-1}} = y_n$, $\frac{dy}{dx} = y'$, et soit donné à x un nouvel accroissement h_n , nous aurons

$$\frac{\Delta y_n}{h_n} = \frac{dy_n}{dx} + \varepsilon_n, \quad \frac{\Delta^n y'}{h h_1 \dots h_{n-1}} = \frac{d^n y'}{dx^n} + \varepsilon',$$

ε_n et ε' étant aussi infiniment petits avec tous les accroissements; et, comme

$$\frac{dy_n}{dx} = \frac{1}{h h_1 \dots h_{n-1}} \frac{d(\Delta^n y')}{dx}$$

et

$$\frac{d(\Delta^n \gamma)}{dx} = \Delta^n \left(\frac{d\gamma}{dx} \right) = \Delta^n \gamma',$$

il viendra

$$\frac{\Delta \gamma_n}{h_n} = \frac{d^n \gamma'}{dx^n} + \varepsilon' + \varepsilon_n,$$

ou

$$\frac{\Delta^{n+1} \gamma}{h^n h_1 h_2 \dots h_n} = \frac{d^{n+1} \gamma}{dx^{n+1}} + \varepsilon' + \varepsilon_n,$$

ce qui montre que la même formule a lieu pour l'ordre $n + 1$.
