Concours d'admission à l'École polytechnique (année 1869)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 378-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__378_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

(ANNÉE 1869.)

Composition de Mathématiques.

On donne un triangle rectangle isoscèle AOB et on demande :

1° L'équation générale des paraboles P, tangentes aux trois côtés du triangle AOB ;

2° L'équation de l'axe de l'une quelconque de ces paraboles;

3° L'équation et la forme du lieu des projections du point O, sommet de l'angle droit du triangle AOB, sur les axes des paraboles P.

Composition de Géométrie descriptive.

Représenter le solide commun à une sphère et à un cône définis de la manière suivante :

La sphère est inscrite dans un cube ayant 15 centimètres de côté; la face inférieure du cube est dans le plan horizontal de la projection et la face postérieure est dans le plan vertical.

Le cône est de révolution; il est tangent au plan horizontal, son sommet est le centre O de la face ABCD du cube, et son axe passe par le sommet (A, A') du cube.

Dans la mise à l'encre, on indiquera les constructions nécessaires pour trouver un point quelconque de la ligne d'intersection du cône et de la sphère et la tangente en ce point.

Nota. — Prendre pour ligne de terre une droite parallèle aux petits côtés de la feuille et à égale distance de ces côtés.

Solution de la question de Mathématiques;

PAR UN ABONNÉ.

Prenez pour axes des coordonnées les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle isoscèle; désignez par a la longueur OA.

Cela posé, si α et β sont deux paramètres variables, toute conique inscrite dans le triangle AOB sera représentée par l'équation

$$\sqrt{\alpha x} + \sqrt{\beta y} + \sqrt{x + y - a} = 0.$$

On exprime comme à l'ordinaire que cette équation représente une parabole; et finalement l'équation générale des paraboles devient

$$(\beta x - \alpha y)^2 - 2a(\beta x + \alpha y) + a^2 = 0$$

avec la relation

$$\alpha + \beta = 1,$$

et l'axe de chaque parabole a pour équation

$$\beta x - \alpha y + \frac{a(\alpha - \beta)}{\alpha^2 + \beta^2} = 0.$$

L'équation du lieu s'obtiendra donc en éliminant α et β entre les équations

$$\alpha + \beta = 1,$$
$$\alpha x + \beta y = 0,$$
$$\beta x - \alpha y + \frac{a(\alpha - \beta)}{\alpha^2 + \beta^2} = 0,$$

ce qui conduit sans peine à l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 - a(x + y)(y - x)^2 = 0.$$

Le lieu est donc du quatrième ordre, ayant au point O un point triple; en ce point triple il y a rebroussement suivant la bissectrice intérieure de l'angle AOB; et, en outre, le point générateur du lieu traverse le point O une autre fois dans la direction perpendiculaire à la tangente de rebroussement. Ce lieu n'a pas de branches infinies réelles; mais il est tangent à la droite de l'infini en chacun des deux points de rencontre de cette droite avec tous les cercles du plan.

Il n'y a donc aucune difficulté à tracer la courbe du lieu, surtout si l'on remarque que ce lieu passe par les deux extrémités de l'hypoténuse AB, et touche cette hypoténuse.

D'ailleurs l'équation polaire du lieu se déduit immédiatement de l'équation déjà écrite, et cette équation

$$\rho = a(\cos\omega + \sin\omega)(\cos\omega - \sin\omega)$$

conduit aussi à une discussion et une construction faciles.

Remarque. — Si l'on décrit la circonférence circonscrite au triangle AOB, cette circonférence est, comme chacun sait, le lieu géométrique des foyers des paraboles P; soit φ l'un quelconque de ces foyers. Projetons ce foyer en G et H sur OA et sur OB. GH sera la tangente au sommet de la parabole dont le foyer est φ; donc φV, perpendiculaire sur GH, sera l'axe, et la perpendiculaire, abaissée du point O sur φV, y marquera le point correspondant M du lieu demandé. Cela montre que le lieu demandé est aussi *le lieu du pied de la directrice sur l'axe*; et cette construction donne sans peine l'équation polaire ci-dessus.

Mais cette construction géométrique est surtout utile pour contrôler les calculs; car elle donne à elle seule la forme du lieu et ses tangentes principales.

Autre solution de la même question;

PAR M. A HILAIRE.

On sait que le lieu des foyers des paraboles inscrites dans un triangle est le cercle circonscrit à ce triangle.

Si je prends pour origine le sommet et pour axes les côtés de l'angle droit du triangle donné et si je pose $OA = OB = a$, l'équation du cercle circonscrit au triangle est $x^2 + y^2 = a(x + y)$.

Un point quelconque (x', y'), pris sur ce cercle, est le foyer d'une parabole inscrite au triangle. Si l'on abaisse de ce point des perpendiculaires sur les trois côtés, les pieds de ces perpendiculaires seront sur une ligne droite qui est précisément la tangente au sommet de la parabole : l'équation de cette droite est

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 1.$$

D'ailleurs la directrice de la parabole doit passer par le point O ; son équation est donc

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 0 \quad \text{ou} \quad y'x + x'y = 0.$$

D'après cela, pour le point (x', y') :

1° L'équation de la parabole est

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = \frac{(y'x + x'y)^2}{x'^2 + y'^2};$$

2° L'équation de l'axe est

$$y - y' = \frac{x'}{y'}(x - x'),$$

x' et y' étant liés par la relation

$$x'^2 + y'^2 = a(x' + y');$$

3° Le lieu demandé n'est autre que le lieu du point de rencontre de la directrice avec l'axe. Pour avoir son équation, il suffit d'éliminer x' et y' entre l'équation de la directrice

(1) $$y'x + x'y = 0,$$

l'équation de l'axe

(2) $$y'y - x'x = y'^2 - x'^2$$

et la relation connue

(3) $$x'^2 + y'^2 = a(x' + y').$$

Pour cela, je pose $x' = \lambda y'$. Les trois équations deviennent par cette substitution

(4) $$y'(x + \lambda y) = 0 \quad \text{ou} \quad x + \lambda y = 0,$$

(5) $$y - \lambda x = y'(1 - \lambda^2),$$

(6) $$y'(1 + \lambda^2) = a(1 + \lambda).$$

En multipliant membre à membre les deux dernières équations, on fait disparaître y' et on obtient l'équation

(7) $$(1 + \lambda^2)(y - \lambda x) = a(1 + \lambda)(1 - \lambda^2).$$

Il ne reste plus qu'à éliminer λ entre cette équation (7) et l'équation (4) qui ne contient pas y; on aura ainsi l'équation du lieu

$$\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)\left(y + \frac{x^2}{y}\right) = a\left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right),$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a(y - x)(y^2 - x^2).$$

C'est une courbe du quatrième degré qui n'a pas de branches infinies; on voit sur l'équation qu'elle passe par les points circulaires à l'infini, par l'origine et par les deux autres sommets du triangle.

L'équation ne change pas si on permute x et y. La courbe est donc symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle yOx. Si on la rapporte à cette droite OX et à sa perpendiculaire OY, l'équation devient

$$(X^2 + Y^2)^2 = \frac{4aX'Y'^2}{\sqrt{2}}.$$

On voit par cette forme d'équation que la courbe n'a pas de points à gauche de OY. Pour la construire, il est plus simple de prendre l'équation en coordonnées polaires, OX étant l'axe polaire. L'équation est

$$\rho = a\sqrt{2}\sin\omega\sin 2\omega.$$

La construction n'offre aucune difficulté.