

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 8
(1869), p. 374-376

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__374_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES
DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 945

(voir 2^e série, t. VIII, p. 276);

PAR M. AQUIT,

Élève au collège de Blaye.

Relations d'identité entre les angles d'un triangle rectiligne :

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \\ &= 2(\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C - 1); \\ 2^{\circ} (\sin A + \sin B + \sin C)^2 + 4(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \\ &\quad + (\cos A + \cos B + \cos C)^2 \\ &= 4(\sin B \sin C + \sin A \sin C + \sin A \sin B). \end{aligned}$$

(J.-CH. DUPAIN.)

1° On sait qu'on a

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ = 2(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C). \end{aligned}$$

Ajoutant et retranchant au second membre le double des quantités égales

$$\sin A + \sin B + \sin C$$

et

$$\sin(B + C) + \sin(A + C) + \sin(A + B),$$

nous avons en développant

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ = 2(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C \\ + \sin B \cos C + \sin C \cos B + \sin A \cos B \\ + \sin C \cos A + \sin A \cos B + \sin B \cos A \\ - \sin A - \sin B - \sin C), \end{aligned}$$

ou bien, mettant $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ en facteur,

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ = 2[\sin A(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \\ + \sin B(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \\ + \sin C(\cos A + \cos B + \cos C - 1)], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ = 2(\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C - 1). \end{aligned}$$

2° Développant, réduisant et remplaçant $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ par $-\cos(B + C)$, $-\cos(C + A)$, $-\cos(A + B)$, le premier membre devient

$$\begin{aligned} 2 \sin B \sin C + 2 \sin C \sin A + 2 \sin A \sin B \\ + 2 \cos B \cos C + 2 \cos C \cos A + 2 \cos A \cos B \\ - 2 \cos(B + C) - 2 \cos(C + A) - 2 \cos(A + B) \\ = 4(\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A), \end{aligned}$$

à cause des termes $2 \cos B \cos C, \dots$, qui se détruisent.

(376)

On trouve encore

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C = \frac{2S}{R^2} = \frac{2pr}{R^2},$$

p , r , R étant le demi-périmètre, le rayon du cercle inscrit, le rayon du cercle circonscrit, et

$$\sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B = \left(\frac{p}{2R} \right)^2 + \left(\frac{r}{2R} \right)^2 + \frac{r}{R}.$$

On a d'un autre côté

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}, \quad \sin A = \frac{a}{2R},$$

d'où

$$\sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B = \frac{bc + ac + ab}{4R^2},$$

d'où la relation connue

$$bc + ac + ab = p^2 + r^2 + 4Rr.$$
