Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 374-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__374_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 945

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 276);

PAR M. AOUIT,
Élève au collége de Blaye.

Relations d'identité entre les angles d'un triangle rectiligne :

1° $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$$= 2(\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C - 1);$$

2° $(\sin A + \sin B + \sin C)^2 + 4(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$

$$+ (\cos A + \cos B + \cos C - 1)^2$$

$$= 4(\sin B \sin C + \sin A \sin C + \sin A \sin B).$$

(J.-CH. DUPAIN.)

1° On sait qu'on a

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$
$$= 2(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C).$$

Ajoutant et retranchant au second membre le double des quantités égales

$$\sin A + \sin B + \sin C$$

et

$$\sin(B + C) + \sin(A + C) + \sin(A + B),$$

nous avons en développant

$$\begin{aligned}
&\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\
&\quad = 2(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C \\
&\qquad + \sin B \cos C + \sin C \cos B + \sin A \cos B \\
&\qquad + \sin C \cos A + \sin A \cos B + \sin B \cos A \\
&\qquad - \sin A - \sin B - \sin C),
\end{aligned}$$

ou bien, mettant $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ en facteur,

$$\begin{aligned}
&\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\
&\quad = 2[\sin A(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \\
&\qquad + \sin B(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \\
&\qquad + \sin C(\cos A + \cos B + \cos C - 1)],
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\
&\quad = 2(\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C - 1).
\end{aligned}$$

2° Développant, réduisant et remplaçant $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ par $-\cos(B + C)$, $-\cos(C + A)$, $-\cos(A + B)$, le premier membre devient

$$\begin{aligned}
&2 \sin B \sin C + 2 \sin C \sin A + 2 \sin A \sin B \\
&\qquad + 2 \cos B \cos C + 2 \cos C \cos A + 2 \cos A \cos B \\
&\qquad - 2\cos(B + C) - 2\cos(C + A) - 2\cos(A + B) \\
&\quad = 4(\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A),
\end{aligned}$$

à cause des termes $2 \cos B \cos C, \ldots$, qui se détruisent.

On trouve encore

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C = \frac{2S}{R^2} = \frac{2pr}{R^2},$$

p, r, R étant le demi-périmètre, le rayon du cercle inscrit, le rayon du cercle circonscrit, et

$$\sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B = \left(\frac{p}{2R}\right)^2 + \left(\frac{r}{2R}\right)^2 + \frac{r}{R}.$$

On a d'un autre côté

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}, \quad \sin A = \frac{a}{2R},$$

d'où

$$\sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B = \frac{bc + ac + ab}{4R^2},$$

d'où la relation connue

$$bc + ac + ab = p^2 + r^2 + 4Rr.$$