

A. HILAIRE

Solution du problème proposé au concours d'agrégation de 1867

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 8
(1869), p. 362-369

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8_362_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ AU CONCOURS
D'AGREGATION DE 1867;**

PAR M. A. HILAIRE.

*Lieu d'un point tel que les deux tangentes menées
de ce point à une ellipse donnée interceptent sur une
droite fixe une longueur constante.*

(*) SALMON, *Leçons d'Algèbre supérieure*, traduit par M. Bazin, p. 217.

Je prends pour axes les deux diamètres conjugués de l'ellipse, dont l'un est parallèle à la droite fixe.

L'équation de l'ellipse est

$$(1) \quad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

celle de la droite fixe

$$(2) \quad x = K.$$

L'ensemble des deux tangentes menées à la courbe par un point (α, β) est représenté par l'équation

$$(3) \quad \begin{cases} (a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 - a^2 b^2)(a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2) \\ = (a^2 \beta y + b^2 \alpha x - a^2 b^2)^2. \end{cases}$$

Si je fais dans cette équation $x = K$, l'équation résultante en y donne les ordonnées d'intersection du système des deux tangentes avec la droite fixe. Il suffit d'exprimer que la différence des racines de cette équation est égale à la longueur constante que j'appellerai $2L$; dans la relation trouvée, je remplacerai α et β par x et y et j'aurai l'équation du lieu.

Voici le calcul :

$$\begin{aligned} & (a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 - a^2 b^2)(a^2 y^2 + b^2 K^2 - a^2 b^2) \\ & = (a^2 \beta y + b^2 \alpha K - a^2 b^2)^2, \\ & (b^2 \alpha^2 - a^2 b^2)a^2 y^2 - 2a^2 \beta(b^2 \alpha K - a^2 b^2)y \\ & + (a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 - a^2 b^2)(b^2 K^2 - a^2 b^2) - (b^2 \alpha K - a^2 b^2)^2 = 0, \\ & (x^2 - a^2)a^2 y^2 - 2a^2 \beta(\alpha K - a^2)y \\ & + (a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 - a^2 b^2)(K^2 - a^2) - b^2(\alpha K - a^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation est de la forme

$$Ay^2 - 2By + C = 0.$$

La différence des racines est $\frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A}$; la condition

demandée est donc $\frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A} = 2L$. Supprimant le facteur 2 et élevant ensuite au carré,

$$B^2 - AC = A^2 L^2.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer A, B, C par leurs valeurs

$$a^4 \beta^2 (\mathbf{K}x - a^2)^2 - a^2 (x^2 - a^2)$$

$$\times [(a^2 \beta^2 + b^2 a^2 - a^2 b^2)(\mathbf{K}^2 - a^2) - b^2 (\mathbf{K}x - a^2)^2]$$

$$= a^4 (x^2 - a^2)^2 L^2,$$

$$a^2 y^2 (\mathbf{K}x - a^2)^2 - (x^2 - a^2)$$

$$\times [(a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2)(\mathbf{K}^2 - a^2) - (b^2 \mathbf{K}x - a^2)^2]$$

$$= a^2 L^2 (x^2 - a^2)^2,$$

$$(a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2)$$

$$\times [(\mathbf{K}x - a^2)^2 - (\mathbf{K}^2 - a^2)(x^2 - a^2) - 2a^2 \mathbf{K}x + \mathbf{K}^2 a^2 + a^2 x^2]$$

$$= a^2 L^2 (x^2 - a^2)^2,$$

$$(4) \quad (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2)(x - \mathbf{K})^2 = L^2 (x^2 - a^2)^2.$$

Telle est l'équation du lieu.

Je vais l'écrire en la résolvant par rapport à y , ou, ce qui revient au même, en la résolvant par rapport à y^2 :

$$(5) \quad y^2 = \frac{(x^2 - a^2)[L^2(x^2 - a^2) - b^2(x - \mathbf{K})^2]}{a^2(x - \mathbf{K})^2}.$$

On voit que la courbe est du quatrième degré, et que l'axe des x est un diamètre des cordes parallèles à l'axe des y .

Discussion.

Elle dépend évidemment de l'étude du trinôme du second degré

$$L^2(x^2 - a^2) - b^2(x - \mathbf{K})^2$$

$$= (L^2 - b^2)x^2 + 2b^2 \mathbf{K}x - a^2 L^2 - b^2 \mathbf{K}^2.$$

La quantité $B^2 - AC$ est, dans ce cas,

$$(6) \quad b^4 K^2 + (L^2 - b^2)(a^2 L^2 + b^2 K^2) = L^2 [b^2 K^2 + a^2 (L^2 - b^2)].$$

$$(7) \quad = L^2 [a^2 L^2 + b^2 (K^2 - a^2)].$$

Le coefficient de x^2 étant $L^2 - b^2$, on est conduit à examiner les différentes hypothèses correspondant au signe de cette quantité.

On y est amené encore d'une autre manière.

Si l'on cherche par la méthode ordinaire les asymptotes non parallèles à l'axe des y (*), on trouve pour c et d les

$$\text{valeurs suivantes : } c = \pm \frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{a}, \quad d = \pm \frac{KL^2}{a\sqrt{L^2 - b^2}};$$

donc l'existence des asymptotes dépend du signe de $L^2 - b^2$:

$L^2 - b^2 > 0$: deux asymptotes réelles, inclinées sur l'axe des x , et le coupant au même point;

$L^2 - b^2 = 0$: c s'annule et e devient infini; les deux asymptotes deviennent parallèles à l'axe des x , mais elles se transportent à l'infini;

$L^2 - b^2 < 0$: deux asymptotes imaginaires.

$$1^\circ \quad L^2 - b^2 > 0.$$

Les racines sont réelles et de signe contraire : appelons-les $-e$ et $+d$.

$1^\circ \quad K > a$. — On voit aisément, par des substitutions, que $-e$ est comprise entre $-\infty$ et $-a$, et que d est comprise entre a et K .

On a alors

$$y^2 = \frac{L^2 - b^2 (x + e)(x + a)(x - a)(x - d)}{a^2 (x - K)^2}.$$

(*) La droite $x = K$ se présente évidemment comme une asymptote parallèle à l'axe des y et même, à cause de $(x - K)^2$, comme deux asymptotes réunies en une seule; d'où il suit qu'il ne peut y avoir plus de deux asymptotes non parallèles à l'axe des y .

Il suffit d'examiner ce qui arrive au-dessus de l'axe des x . J'appelle E, A', A, D les points de Oz correspondant aux racines, K le point où la droite fixe coupe Ox, M le point où les asymptotes MP et MP' coupent Ox.

x peut varier :

De $-\infty$ à $-e$: une branche de courbe, d'abord asymptote à MP' et aboutissant en E;

De $-a$ à $+a$: courbe limitée allant de A' en A et enveloppant l'ellipse, comme cela résulte de la comparaison des valeurs

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2), \\ \gamma^2 &= \frac{(a^2 - x^2) [b^2(x - K)^2 + L^2(a^2 - x^2)]}{a^2(x - K)^2} \\ &= \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) + \dots; \end{aligned}$$

De d à $+\infty$: comme d est compris entre a et K, on a d'abord une branche partant du point D et qui vient être asymptote à la droite K, puis une branche qui commence par être asymptote à la droite K, et qui finit par être asymptote à la droite MP.

Remarque. — La droite MP rencontre évidemment en un seul point la branche qui part de D; comme cette droite est une asymptote, elle a avec la courbe deux points de rencontre à l'infini, il n'en reste donc que deux à distance finie; je viens d'en signaler un. L'autre ne peut pas se trouver sur la portion *fermée* de la courbe qui va de A' en A, car une droite rencontre une pareille courbe en deux points; il appartient nécessairement soit à la première, soit à la dernière de toutes les branches.

2° $K < a$. — On voit encore, par des substitutions, que $-e$ est comprise entre $-\infty$ et $-a$, et que d est comprise entre a et $+\infty$.

L'équation a la même forme que précédemment, et x peut varier dans les mêmes intervalles. Mais, comme K est plus petit que a , la branche qui part de A' vient être asymptote à la droite K , puis de l'autre côté de cette droite part une branche qui, d'abord asymptote, aboutit en A .

Il est clair que, dans ce cas, les deux points de rencontre à distance finie de la courbe avec l'asymptote MP appartiennent respectivement aux deux branches dont je viens de parler.

Enfin la branche qui part du point D n'est plus asymptote qu'à la droite MP .

3° $K = a$. — L'équation devient

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{(x+a)(x-a)[L^2(x+a)(x-a) - b^2(x-a)^2]}{a^2(x-a)^2} \\ &= \frac{(x+a)[L^2(x+a) - b^2(x-a)]}{a^2} \\ &= \frac{L^2 - b^2}{a^2} (x+a) \left(x + a \frac{L^2 + b^2}{L^2 - b^2} \right). \end{aligned}$$

La courbe se réduit à une hyperbole qui coupe l'axe Ox aux points E et A' , et qui a pour asymptotes les deux droites MP et MP' .

$$2^\circ \quad L^2 - b^2 = 0.$$

Il n'y a plus d'asymptotes non parallèles à l'axe des y .
L'équation devient

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{(x^2 - a^2)[b^2(x^2 - a^2) - b^2(x - K)^2]}{a^2(x - K)^2} \\ &= \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) \frac{2Kx - a^2 - K^2}{(x - K)^2} \\ &= \frac{2Kb^2}{a^2} \frac{(x+a)(x-a) \left(x - \frac{a^2 + K^2}{2K} \right)}{(x - K)^2}. \end{aligned}$$

La racine $-e$ disparaît, la racine d est toujours positive.

1° $K > a$. — On voit, par des substitutions, que d est comprise entre a et K .

x ne peut commencer à varier qu'entre $-a$ et a ; on a la même forme de courbe que dans l'hypothèse correspondante du premier cas, seulement la première branche disparaît et la dernière n'a plus pour asymptote que la droite K .

2° $K < a$. — On voit, par des substitutions, que d est $> a$.

Résultats analogues.

3° $K = a$. — L'équation devient

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}(x+a).$$

La courbe se réduit à une parabole qui coupe l'axe Ox au point A' .

$$3^\circ L^2 - b^2 < 0.$$

Il n'y a plus d'asymptotes non parallèles à l'axe des y .

Dans ce cas les racines du trinôme du second degré ne sont pas nécessairement réelles; d'ailleurs, quand elles sont réelles, elles sont toutes deux de même signe et toutes deux positives.

1° $K > a$. — Les racines sont réelles, comme cela résulte de la forme (7) de $B^2 - AC$. On voit, par des substitutions, que la plus petite d est comprise entre a et K , comme la racine positive unique dans le cas de $L^2 - b^2 > 0$. La plus grande racine e est comprise entre K et $+\infty$.

L'équation peut s'écrire

$$y^2 = \frac{L^2 - b^2(x+a)(x-a)(x-d)(x-e)}{\alpha^2(x-K)^2}.$$

A cause de $L^2 - b^2 < 0$, x ne peut varier qu'entre $-a$ et $+a$; on a donc une courbe fermée entre A' et A , puis deux branches infinies asymptotes à la droite K , l'une partant de D , l'autre aboutissant en E .

2° $K < a$. — Les racines ne sont pas nécessairement réelles.

Si $a^2 L^2 - b^2 (a^2 - K^2) > 0$, les racines sont réelles et inégales, plus grandes que a : l'équation conserve la même forme que dans le premier cas.

On a d'abord deux branches infinies asymptotes à la droite K l'une partant de A' , l'autre aboutissant en A , puis une courbe fermée entre D et E .

Si $a^2 L^2 - b^2 (a^2 - K^2) = 0$, la racine est double et plus grande que a , les deux points D et E se réunissent en un seul qui devient un point isolé de la courbe.

Si $a^2 L^2 - b^2 (a^2 - K^2) < 0$, racines imaginaires.

3° $K = a$. — L'équation devient

$$y^2 = \frac{L^2 - b^2}{a^2} (x + a) \left(x - a \frac{b^2 + L^2}{b^2 - L^2} \right).$$

A cause de $L^2 - b^2 < 0$, la courbe est une ellipse comprise entre les points A' et D .