Nouvelles annales de mathématiques

R. Radau

Sur la résultante de trois formes quadratiques ternaires

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 358-362

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__358_0>

SUR LA RÉSULTANTE DE TROIS FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES;

PAR M. R. RADAU.

La résultante de trois formes ternaires du second degré, ou l'équation de condition qui doit être remplie pour que trois sections coniques passent par un même point, peut s'obtenir de diverses manières. On peut, par exemple, l'écrire sous la forme d'un déterminant de six lignes; il suffit pour cela d'éliminer les six quantités $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$ entre les trois formes données et trois autres du même degré qui s'annulent avec les premières. Pour ces formes auxiliaires on peut prendre, avec M. Salmon, les dérivées partielles $\frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial J}{\partial y}, \frac{\partial J}{\partial z}$ du déterminant fonctionnel J, qui sont du second degré, parce que J est du troisième, ou bien trois déterminants que M. Sylvester se procure de la manière suivante. La forme

$$(a, b, c, f, g, h \between x, y, z)^2$$
$$= ax^2 + by^2 + cz^2 + fyz + gzx + hxy$$

peut s'écrire

$$(a)x^2 + (by + hx + fz)y + (cz + gx)z,$$

et, si nous éliminons les trois quantités x^2, y, z, qui se trouvent multipliées par les parenthèses, entre les trois équations

$$\begin{aligned}
(a)x^2 + (by + hx + fz)y + (cz + gx)z &= 0,\\
(a')x^2 + (b'y + h'x + f'z)y + (c'z + g'x)z &= 0,\\
(a'')x^2 + (b''y + h''x + f''z)y + (c''z + g''x)z &= 0,
\end{aligned}$$

nous avons le déterminant

$$(a,\ by + hx + fz,\ cz + gx),$$

qui est encore du second degré. En isolant de la même manière y^2, x, z et z^2, x, y, on obtient deux déterminants semblables; ce sont les formes auxiliaires qui permettent d'établir la résultante par élimination *dialytique* des six quantités $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$.

J'ai remarqué que l'on peut, d'une manière analogue, obtenir des formes *linéaires* qui s'évanouissent avec les formes données, de sorte qu'il est possible de présenter la résultante comme un déterminant de *trois lignes* seulement. En effet, les termes de

$$(a,\ by + hx + fz,\ cz + gx)$$

qui sont du second degré en x, y sont les deux suivants :

$$(abg)xy + (ahg)x^2.$$

(Je désignerai toujours par (abc) le déterminant des neuf coefficients $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$.)

Or, en éliminant x^2 et y^2 entre les formes primitives, nous avons

$$(a,\ b,\ hxy + fyz + gzx + cz^2)$$
$$= (abh)xy + (abf)yz + \ldots.$$

De même, en éliminant xy et x^2,

$$(h,\ a,\ by^2 + fyz + gzx + cz^2)$$
$$= (abh)y^2 + (afh)yz + \ldots$$

Il s'ensuit que l'expression

$$(abh)(a,\ by + hx + fz,\ cz + gx)$$
$$- (abg)(a,\ b,\ hxy + fyz + gzx + cz^2)$$
$$- (ahg)(h,\ a,\ by^2 + fyz + gzx + cz^2)$$

sera divisible par z, ou linéaire en x, y. On obtient deux expressions semblables au moyen des deux autres déterminants de M. Sylvester, combinés avec ceux qui résultent de l'élimination de deux des quantités x^2, y^2, xy entre les formes données. Les neuf coefficients de ces expressions se réduisent à six, parce que trois coïncident avec trois autres. Ainsi trois équations du type

$$(a, b, c, f, g, h \between x, y, z)^2 = 0$$

entraînent les trois suivantes :

$$\begin{aligned} A_1 y + Cx + Bz &= 0, \\ Cy + B_1 x + Az &= 0, \\ By + Ax + C_1 z &= 0, \end{aligned}$$

et la résultante peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} A_1 & C & B \\ C & B_1 & A \\ B & A & C_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les six coefficients sont :

$$\begin{aligned} A_1 &= -(abf)(abf) + (afh)(bhf) + (abh)(bfg + bch), \\ B_1 &= -(abg)(abg) + (agh)(bhg) + (abh)(afg + cah), \\ C_1 &= -(abc)(abc) + (ach)(bhc) + (abh)(cgf), \\ C &= -(abf)(abg) + (agh)(bhf) + (abh)(abc), \\ B &= -(abc)(abf) + (ach)(bhf) + (abh)(bcg), \\ A &= -(abc)(abg) + (agh)(bhc) + (abh)(caf); \end{aligned}$$

ils ont tous un terme affecté du facteur (abh), que je désignerai par λ, et l'on voit que la résultante se présente sous cette forme :

$$(P + \lambda p,\ Q + \lambda q,\ R + \lambda r) = 0.$$

Or il est facile de faire en sorte que le déterminant (PQR) s'annule et que la résultante devienne divisible par λ. Il suffit pour cela de remarquer que les seconds termes des coefficients C, B, A peuvent être transformés de cette manière :

$$\begin{aligned}
(agh)(bhf) &= (bhg)(afh) + \lambda(fgh),\\
(ach)(bhf) &= (afh)(bhc) + \lambda(chf),\\
(agh)(bhc) &= (ach)(bhg) + \lambda(cgh),
\end{aligned}$$

et d'employer ces expressions transformées concurremment avec les anciennes dans la formation de la résultante. Il se trouve, en outre, que la somme

$$\lambda(pQR + qRP + rPQ)$$

est alors égale au terme $\lambda^3(pqr)$; nous pouvons diviser par λ^2, et il vient

$$2\lambda(pqr) + (Pqr) + (Qrp) + (Rpq) = 0.$$

Cette nouvelle expression de la résultante se compose d'une suite de termes dont chacun est le produit de quatre déterminants du troisième degré, tels que λ ; elle est donc du quatrième degré par rapport aux coefficients de chacune des trois formes données, ou bien du douzième par rapport à l'ensemble des coefficients. Développée, elle n'est d'abord symétrique qu'à l'égard des coefficients de x et de y ; mais on peut la rendre symétrique par rapport à x, y, z, en assemblant les termes homologues et en modifiant quelques autres par les procédés connus. Pour abréger l'écriture, je ferai $(abc) = \Delta$, $(fgh) = \nabla$, et je désignerai par A, B, C, F, G, H les déterminants mineurs bc, ca, ab, gh, hf, fg, de sorte que $\Delta = aA = bB = cC$, $\nabla = fF = gG = hH$. La résultante peut alors se mettre sous cette forme :

$$\begin{aligned}
&\Delta^3\nabla + (\Delta + \nabla)aF.bG.cH + (8\Delta + 2\nabla)fA.gB.hC \\
&\quad + (fB.fC + gC.gA + hA.hB - \Delta^2)^2 \\
&\quad + \Delta^2(aH.bH + bF.cF + cG.aG) \\
&\quad - 2\Delta^2(aF.fA + bG.gB + cH.hC) \\
&\quad + \Sigma[(hA)^2cF.aF + (hB)^2bG.cG + cF.aF.bG.cG] \\
&\quad + \Sigma[(hA)^2(aF.fB - aG.gB) + (hB)^2(bG.gA - bF.fA)] \\
&\quad - 4\Sigma fA.fB.hB.hC \\
&\quad + \Sigma(2fA.gB.aG.bF - fC.gC.cG.cF) \\
&\quad - \Sigma aF.fA.fB\,fC - \Sigma fA.aF.bF.cF \\
&\quad + \Sigma aF(bG.cG.fB + bH.cH.fC,
\end{aligned}$$

où le signe Σ se rapporte aux permutations circulaires des lettres a, b, c et f, g, h. Il est visible que plusieurs termes de cette expression proviennent du carré de l'invariant du sixième ordre :

$$\begin{aligned}
\Theta = &fB.fC + gC.gA + hA.hB \\
&- \frac{1}{2}(aH.bH + bF.cF + cG.aG) \\
&+ aF.fA + bG.gB + cH.hC \\
&- \Delta^2 - \frac{1}{2}\Delta\nabla + \frac{1}{8}\nabla^2.
\end{aligned}$$

On sait, en effet, que la résultante est égale à $\Theta^2 - 64\Sigma$, où Σ est un autre invariant découvert par M. Hermite (*).