HOÜEL

Sur la méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis (calcul des équipollences)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 337-357

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__337_0>

SUR LA MÉTHODE D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE DE M. BELLAVITIS (CALCUL DES ÉQUIPOLLENCES)

(suite et fin, voir 2e série, t VIII, p. 289);

PAR M. HOÜEL,
Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

---

24. Maintenant que nous avons exposé tous les principes du calcul des équipollences, nous pouvons donner quelques applications à la solution graphique des problèmes de géométrie.

I. *En un point donné* A, *construire un triangle* AXY, *semblable à un triangle donné, et dont les sommets* X, Y *soient aux distances f, g d'un point donné* O.

Connaissant la forme du triangle AXY, on connaît par conséquent le rapport

$$\frac{\mathrm{AY}}{\mathrm{AX}} = ni^{\alpha},$$

tant par sa grandeur n que par son angle $\mathrm{XAY} = \alpha$, et la Règle I nous donnera les équipollences

$$\mathrm{OA} + \mathrm{AX} = \mathrm{OX}, \quad \mathrm{OA} + ni^{\alpha}.\mathrm{AX} = \mathrm{OY}.$$

En éliminant AX, il vient

$$\mathrm{OY} - ni^{\alpha}.\mathrm{OX} = \mathrm{OA} - ni^{\alpha}.\mathrm{OA}.$$

Le second membre de cette équipollence deviendra OU, si l'on construit la droite $\mathrm{AU} = ni^{\alpha}.\mathrm{AO}$, ce qui veut dire que le triangle AOU est semblable au triangle donné (auquel AXY doit être semblable). Ensuite, l'équipollence

$$OY - ni^{\alpha}.OX = OU,$$

comparée à l'identité

$$OY - UY = OU,$$

nous montre que sur la droite OU on devra construire un triangle OUY, dont on connaît les longueurs g, nf des deux côtés OY et $UY = nf = f\,\frac{AU}{AO}\cdot$ Ayant trouvé Y, on achèvera facilement le triangle AYX, directement semblable à AUO.

Plusieurs autres problèmes se résolvent comme le précédent, en les ramenant à une équipollence trinôme, qui contient deux inconnues.

II. *Couper deux droites données* AD, BE *par une troisième* XY, *de manière que les segments* AX, BY, XY *soient dans le même rapport que les lignes* AD, BE *et l'unité de longueur.*

Nous aurons

$$AX = r.AD, \quad BY = r.BE, \quad XY = r.i^{u},$$

u étant l'inclinaison inconnue de XY. En substituant ces valeurs dans l'équipollence

$$AX + XY + YB = AB,$$

il vient

$$r.AD + r.i^{u} - r.BE = AB.$$

Si l'on mène DU équipollente à EB, cette relation prend la forme trinôme

$$\frac{1}{r}\cdot AB - i^{u} = AD - BE = AU.$$

En comparant celle-ci à l'identité

$$AV - VU = AU,$$

elle nous indique de couper en V la droite AB par un arc décrit du centre U, et d'un rayon égal à l'unité de longueur, après quoi l'on aura

$$\frac{AB}{AV} = \frac{AX}{AD},$$

de telle sorte que BX sera parallèle à VD, et XY parallèle à $VU = i^u$.

III. *Inscrire dans un cercle un quadrilatère* XYZT, *de manière que les trois côtés* XY, YZ, ZT *passent respectivement par les points* A, B, C, *et que le quatrième côté* TX *ait une longueur donnée.*

Soit OH le rayon que nous prendrons pour origine des inclinaisons, et supposons les sommets du quadrilatère déterminés par les relations

$$OX = i^x . OH, \quad OY = i^y . OH, \quad OZ = i^z . OH, \quad OT = i^t . OH.$$

La condition pour que AXY soit une droite est donnée par l'équipollence

$$OA - i^x . OH = p(OA - i^y . OH).$$

Au moyen de sa conjuguée

$$\text{conj}OA - i^{-x} . OH = p(\text{conj}OA - i^{-y} . OH),$$

on éliminera p, ce qui donnera

$$(1) \qquad i^x = \frac{OA - i^y . OH}{OH - i^y . \text{conj}OA}.$$

On trouvera de même

$$(2) \qquad i^y = \frac{OB - i^z . OH}{OH - i^z . \text{conj}OB},$$

$$(3) \qquad i^z = \frac{OC - i^t . OH}{OH - i^t . \text{conj}OC}.$$

En désignant maintenant par δ l'arc TX, on aura

$$(4)\qquad i' = i^{x-\delta}.$$

On exécutera les substitutions de ces équipollences les unes dans les autres, en faisant les constructions suivantes :

$$(5)\qquad AA_1 = -OB,\quad HH_1 = -\frac{OA.\operatorname{conj} OB}{OH},$$

après quoi l'équipollence (2) donnera, par la substitution dans (1),

$$i^x = \frac{OA_1 + i^z.OH_1}{\operatorname{conj} OH_1 + i^z.\operatorname{conj} OA_1}.$$

En combinant cette dernière avec (3), et posant

$$(6)\qquad A_1A_2 = \frac{OH_1.OC}{OH},\quad H_1H_2 = \frac{OA_1.\operatorname{conj} OC}{OH},$$

on aura

$$i^x = \frac{OA_2 - i'.OH_2}{\operatorname{conj} OH_2 - i'.\operatorname{conj} OA_2}.$$

Substituant enfin la valeur (4), et faisant

$$(7)\qquad OW = OH_2 + i^{\delta}.\operatorname{conj} OH_2,\quad OU = \frac{OH.OW}{\operatorname{conj} OA_2},$$

on aura

$$i^x.OH + i^{\delta-x}.\frac{OH.OA_2}{\operatorname{conj} OA_2} = OU.$$

Cette équipollence, comparée avec la relation

$$OX + XU = OU,$$

nous apprend que le point X s'obtiendra en coupant le cercle donné par un autre cercle égal, ayant pour centre U.

Les équipollences (5), (6), (7) indiquent clairement la construction qu'il faut faire. On mènera AA_1 équipollent à BO; on construira le triangle OAK inversement semblable à OHB, et l'on mènera $HH_1 = KO$; on formera les triangles OH_1L_1, directement semblable à OHC, et OA_1K_1 inversement semblable au même triangle OHC, et l'on mènera $A_1A_2 = OL_1$, $H_1H_2 = OK_1$. Soit la corde HI du cercle égale au côté TX du quadrilatère cherché. Menons OW perpendiculaire à cette ligne HI et ayant, par conséquent, pour inclinaison $\frac{1}{2}\delta$, et coupons-la de telle manière que H_2W soit égal à OH_2. Enfin, ayant construit OWU inversement semblable à OA_2H, la droite perpendiculaire sur le milieu de OU coupera le cercle donné au sommet X du quadrilatère cherché.

La direction du rayon OH est arbitraire. En la faisant coïncider avec OC, les triangles OHC, OH_1L_1, OA_1K_1 se réduisent à trois droites coupées proportionnellement.

25. Si O est un point fixe et que OM dépende d'une variable *réelle* t au moyen de l'équipollence

$$OM = \varphi(t),$$

tous les points M formeront une ligne.

L'équipollence comprend les divers systèmes de coordonnées. Ainsi, si

$$OM = x + yi,$$

et que x et y soient des fonctions de t, ou bien qu'elles soient liées entre elles par une équation, on aura le système des coordonnées orthogonales. Si

$$OM = ri^u,$$

r et u seront les coordonnées polaires. Du reste, OM pourra être représentée de toute autre manière; ainsi, par exemple, la relation

$$OM = at + bi^t$$

exprime évidemment la génération d'une cycloïde;

$$OM = ai^t + bi^{2t},$$

celle d'une épicycloïde.

Soit M′ un point de la courbe infiniment voisin de M, et correspondant à la valeur $t + dt$ de la variable indépendante. La droite

$$MM' = OM' - OM = d.OM$$

aura pour direction-limite celle de la tangente. Si l'on multiplie $d.$OM par un facteur réel quelconque p, l'équipollence

$$MT = p.dOM,$$

ou, si l'on veut,

$$MT = p \cdot \frac{d.OM}{dt}$$

représentera un point quelconque de la tangente, en donnant successivement à la variable p toutes les valeurs réelles. Si l'on ne veut considérer que la direction, on pourra supposer, pour plus de simplicité, $p = 1$.

Si l'on augmente l'inclinaison de la tangente d'un angle droit, en multipliant la valeur de MT par i, on aura l'équation de la normale

$$MN = ip.dOM, \quad \text{ou} \quad MN = ip \cdot \frac{dOM}{dt}.$$

Ainsi, l'équation du cercle étant

$$OM = ai^t,$$

celle de la tangente sera [à cause de $d.i^t = idt.i^t$ (n° 26)]

$$MT = ia.i^t,$$

et celle de la normale

$$MN = i^2 a . i^t = - OM.$$

26. Pour montrer quelques applications des équipollences aux courbes, considérons la relation

$$OM = \cos t . OA + \sin t . OB,$$

qui appartient à une ellipse rapportée à deux demi-diamètres conjugués OA, OB. La tangente au point M est donnée par la droite MT, qui est la dérivée de OM par rapport à la variable t, savoir :

$$MT = \frac{d . OM}{dt} = - \sin t . OA + \cos t . OB.$$

Si l'on cherche le point Q où la tangente rencontre OA prolongé, il faudra prendre la somme géométrique de OM et de $- MT \cdot \frac{\sin t}{\cos t}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} OQ &= \cos t . OA + \sin t . OB + \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot OA - \sin t . OB \\ &= \frac{1}{\cos t} \cdot OA. \end{aligned}$$

La droite

$$ON = - \sin t . OA + \cos t . OB,$$

équipollente à la tangente précédente MT, donne un autre point N de l'ellipse, en changeant seulement, dans l'expression de OM t en $\frac{\pi}{2} + t$. Les droites OM, ON sont aussi deux diamètres conjugués.

Il est facile de s'assurer que l'on a

$$OM^2 + ON^2 = OA^2 + OB^2.$$

Par conséquent, les deux points F, F_1, tels que l'on ait

$$OF_1 = - OF, \quad OF^2 = OM^2 + ON^2,$$

restent toujours les mêmes, quels que soient les demi-diamètres conjugués OM, ON que l'on considère. L'équipollence précédente donne

$$ON^2 = OF^2 - OM^2 = (OF - OM)(OF + OM)$$
$$= MF(OM - OF_1) = MF.F_1M,$$

de laquelle on conclut

$$\mathrm{gr}^2\,ON = \mathrm{gr}\,MF.\mathrm{gr}\,F_1M,$$
$$2\,\mathrm{incl}\,ON = \mathrm{incl}\,MF + \mathrm{incl}\,F_1M;$$

et comme ON est parallèle à la tangente en M, il s'ensuit de là que cette tangente sera bissectrice de l'angle formé par un rayon vecteur MF et le prolongement de l'autre F_1M. En outre, le carré du demi-diamètre ON, conjugué de OM, est égal au produit des deux rayons vecteurs MF, MF_1.

Pour déterminer les foyers, connaissant deux diamètres conjugués, on pourra construire

$$OF = \sqrt{OA\left(OA + \frac{OB^2}{OA}\right)},$$

c'est-à-dire que, ayant fait le triangle OBD directement semblable à OAB, et mené la droite AE = OD, OF sera une moyenne proportionnelle entre OA et OE=OA+OD, et partagera l'angle AOE en deux parties égales.

On pourrait encore prendre la formule

$$OF = \sqrt{(OA + i.OB)(OA - i.OB)},$$

c'est-à-dire, du point A mener $AK = - AK_1$, égales et perpendiculaires à OB, puis construire la moyenne géométrique

$$OF = \sqrt{OK.OK_1}.$$

27. Si u est exprimé en parties de l'angle droit, on aura

$$\cos u = \frac{i^u + i^{-u}}{2}.$$

Mais si l'angle est exprimé en parties du rayon, alors

$$\cos t = \frac{i^{\frac{2t}{\pi}} + i^{-\frac{2t}{\pi}}}{2},$$

ou, à cause de $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

M. Bellavitis simplifie la notation en posant $\varepsilon = e^i$. Malgré l'avantage que présente cette simplification dans les calculs, nous conserverons ici la notation habituelle, pour nous écarter le moins possible des usages reçus. Ainsi e^{it} ou ε^t est un *coefficient d'inclinaison* comme i^u, avec cette différence que l'unité de u est l'angle droit, et celle de t l'arc égal au rayon.

Le second membre de l'équipollence

$$OM = \cos t . OA + \sin t . OB$$

peut se développer ainsi

$$\frac{1}{2}(OA - i.OB)e^{it} + \frac{1}{2}(OA + i.OB)e^{-it}$$
$$= \frac{1}{2} OK . e^{it} + \frac{1}{2} OK_1 . e^{-it},$$

ce qui fait voir que l'ellipse peut s'engendrer à la manière d'une hypocycloïde, au moyen des deux rotations opposées e^{it}, e^{-it}.

28. Avant d'établir les formules générales relatives aux courbes, il ne sera peut-être pas inutile d'étudier

quelques-unes des propriétés de la cycloïde, représentée par l'équipollence

$$(1)\qquad OM \doteq t - ie^{ti}.$$

En prenant la dérivée par rapport à t, on a, pour la tangente à la cycloïde,

$$(2)\qquad MT \doteq 1 + e^{ti}.$$

On a, pour une portion de la normale,

$$MN \doteq \iota . MT \doteq i + ie^{ti},$$

ce qui nous donne

$$ON \doteq OM + MN \doteq t + \iota.$$

De même que $OC \doteq t$ donne la position du centre du cercle générateur, de même on aura

$$CN \doteq ON - OC \doteq i;$$

donc la normale passe par le point N, où le cercle générateur touche la base DB.

On obtient un autre point R de la normale en posant

$$OR \doteq OM + p . MN \doteq t - ie^{ti} + pi(1 + e^{ti}).$$

Pour que cette valeur donne le point d'intersection de cette normale avec la normale infiniment voisine, il faut que le point R ne change pas lorsqu'on donne à t un accroissement infiniment petit ω, pourvu que l'on donne en même temps à p un accroissement convenable ϖ. On doit donc avoir

$$(1 + e^{ti} - pe^{ti})\omega + \iota(1 + e^{ti})\varpi \doteq 0.$$

Tirant de là la valeur de $\frac{\varpi}{\omega}$, laquelle, étant réelle, devra être égale à sa propre conjuguée, il vient

$$\frac{\varpi}{\omega} = \frac{pe^{it} - e^{it} - 1}{i(1 + e^{it})} = \frac{pe^{-it} - e^{-it} - 1}{-i(1 + e^{-it})},$$

d'où

$$-ip + i + ie^{-it} - ipe^{it} + ie^{it} + i$$
$$= ip - i - ie^{it} + ipe^{-it} - ie^{-it} - i,$$

ce qui nous donne

$$p = 2.$$

Donc le rayon de courbure MR est double de la normale MN.

Le lieu des centres de courbure, c'est-à-dire la développée de la cycloïde, est représentée par

$$OR = t + ie^{it} + 2i,$$

et est une cycloïde égale à la cycloïde primitive

$$OM = t - e^{it}.$$

Si de chaque point M de la cycloïde on mène la droite MS, formant avec MR un angle donné α, et ayant avec MR un rapport donné a, c'est-à-dire si l'on prend

$$MS = ae^{i\alpha}.MR,$$

il viendra

$$OS = t - ie^{it} + 2aie^{i\alpha}(1 + e^{it}) = 2aie^{i\alpha} + t + (2ae^{i\alpha} - 1)ie^{it},$$

et par conséquent la courbe S est aussi engendrée par la composition du mouvement progressif, exprimé par le terme t, avec un mouvement rotatoire de rayon constant $2ae^{i\alpha} - 1$. Si $a = \cos\alpha$, la courbe S devient une cycloïde ordinaire, et elle est une *développée imparfaite* de la cycloïde M.

Si la cycloïde M se meut parallèlement à la base, elle aura pour expression

$$OM = \tau + t - ie^{it}, \tag{3}$$

τ étant un paramètre de position. Pour trouver les trajectoires orthogonales de toutes ces cycloïdes, observons que la même équation (3) représentera aussi la trajectoire cherchée, si l'on détermine t en fonction de τ, de manière à particulariser dans chaque cycloïde le point où celle-ci est coupée par la trajectoire. La tangente à la trajectoire sera, par suite, représentée par la dérivée

$$\frac{d\tau}{dt} + 1 + e^{it},$$

et celle-ci doit être perpendiculaire à la tangente $1 + e^{it}$ de chaque cycloïde ; d'où l'on conclut que

$$\frac{d\tau}{dt} = -2,$$

et, partant,

$$\tau = C - 2t.$$

Donc toutes les trajectoires orthogonales sont exprimées par l'équipollence

$$OM = C - t - ie^{it},$$

et ce sont d'autres cycloides égales à la proposée.

La dérivée de l'arc de cycloïde est

$$\begin{aligned} \operatorname{gr} MT &= \sqrt{MT.\operatorname{conj} MT} = \sqrt{(1+e^{it})(1+e^{-it})} \\ &= e^{\frac{1}{2}it} + e^{-\frac{1}{2}it} = 2\cos\frac{t}{2}\cdot \end{aligned}$$

29. Quelle que soit la fonction OM qui détermine une courbe, nous pourrons déterminer la développée par les calculs suivants. dOM est la direction de la tangente ; par conséquent, le rayon de courbure

$$MR = \frac{i}{\lambda}\cdot d\,OM$$

est une position de la normale, et la développée, comme enveloppe de toutes les normales, sera donnée par la relation

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OM} + \frac{i}{\lambda}\, d\mathrm{OM},$$

pourvu que λ soit une fonction du t contenu dans OM, telle que MR devienne tangente à la développée au point R. Pour cette raison la ligne

$$d\mathrm{OR} = d\mathrm{OM} + \frac{i}{\lambda}\cdot d^2\mathrm{OM} - \frac{i\,d\lambda}{\lambda^2}\cdot d\mathrm{OM}$$

doit être parallèle à la ligne $i.d\mathrm{OM}$. En multipliant par conj dOM, on voit que

$$d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM} + \frac{i}{\lambda}\cdot \mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}.d^2\mathrm{OM}$$

devient parallèle à i. En ajoutant donc à cette expression sa conjuguée, on aura

$$2d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM} + \frac{i}{\lambda}(\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}.d^2\mathrm{OM} - d\mathrm{OM}\ \mathrm{conj}\, d^2\mathrm{OM}) = 0.$$

On obtient ainsi la valeur de λ, d'où l'on déduit que

$$\mathrm{MR} = \frac{2(d\mathrm{OM})^2.\ \mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d^2\mathrm{OM} - \mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}.d^2\mathrm{OM}}.$$

La valeur de λ qu'il faut substituer dans $\mathrm{MR} = \frac{i}{\lambda}\, d\mathrm{OM}$ peut se tirer encore du développement de

$$\frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}} = l + i\lambda,$$

parce que cette supposition rend identiquement nulle l'expression

$$2 + \frac{i}{\lambda}\left(\frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}} - \frac{\mathrm{conj}\, d^2\mathrm{OM}}{\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}}\right).$$

30. Si, outre la ligne

$$MT = \frac{dOM}{dt},$$

on construit la ligne

$$MU = \frac{d^2OM}{dt},$$

et qu'on abaisse UL perpendiculaire sur MT, on aura

$$LU = i\lambda . MT,$$

et, par suite, le rayon de courbure est

$$MR = \frac{MT^2}{UL}.$$

Le rayon de courbure peut aussi se trouver en cherchant le cercle qui a un contact du second ordre avec la courbe M. Un point N de ce cercle sera représenté par

$$ON = OR + e^{iu}.RM.$$

En prenant la dérivée, nous devrons supposer OR et RM constants, et faire ensuite $u = 0$. Nous aurons ainsi

$$\frac{dON}{du} = i.RM, \quad d^2ON = (i\,d^2u - du^2).RM,$$

quantités que nous devrons égaler aux différentielles dM, d^2M. En les divisant l'une par l'autre il vient

$$\frac{d^2OM}{dOM} = \frac{d^2u}{du} + i\,du,$$

d'où il s'ensuit que le rayon de courbure RM sera donné par la relation

$$dOM = i\,du.RM,$$

ce qui coïncide avec la relation déjà trouvée $MR = \frac{i}{\lambda}dOM$ puisque $du = \lambda$.

Quelquefois on emploiera avec avantage l'équipollence

$$\mathrm{OM} = \int e^{i\theta} ds,$$

θ étant l'inclinaison de la tangente. D'après cette relation, on a

$$\frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}} = \frac{d^2 s}{ds} + i\,d\theta.$$

Donc le rayon de courbure est

$$\mathrm{MR} = i\,\frac{ds}{d\theta}\,e^{i\theta}.$$

Si l'on veut rapporter la courbe à des coordonnées orthogonales, on posera

$$\mathrm{OM} = x + iy,$$

et le rayon de courbure sera généralement déterminé par l'expression

$$\mathrm{MR} = \frac{2\,\mathrm{gr}(d\mathrm{OM})^2 . d\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\,d^2\mathrm{OM} - \mathrm{conj}\,d\mathrm{OM}.d^2\mathrm{OM}}$$
$$= \frac{(dx^2 + dy^2)(dy - i\,dx)}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}.$$

31. Déterminons la courbe P *parallèle* à la courbe donnée M, c'est-à-dire ayant avec elle toutes ses normales MP communes.

Le point P appartenant à la normale, on aura

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OM} + ip.d\mathrm{OM}.$$

En outre, la tangente en P, qui est déterminée de direction par la relation

$$d\mathrm{OP} = d\mathrm{OM} + ip.d^2\mathrm{OM} + idp\;d\mathrm{OM},$$

doit être parallèle à la tangente dOM. En multipliant par conj dOM, nous aurons

$$pi.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}.d^2\mathrm{OM} + idp.d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}$$

parallèle à dOM.conj dOM, c'est-à-dire d'inclinaison nulle, et partant équipollente à sa propre conjuguée

$$-pi.d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d^2\mathrm{OM} - idp.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}.d\mathrm{OM}.$$

On en conclut

$$-\frac{2dp}{p} = \frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}} + \mathrm{conj}\,\frac{d^2\mathrm{OM}}{d\mathrm{OM}},$$

et, en intégrant,

$$p = \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{d\mathrm{OM}.\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}}}.$$

Donc la distance entre les deux courbes est

$$\mathrm{MP} = \mathrm{C}i.\sqrt{\frac{d\mathrm{OM}}{\mathrm{conj}\, d\mathrm{OM}}},$$

et, par suite, elle est de grandeur constante, et les courbes sont vraiment parallèles.

Supposons plus généralement que MP forme avec la tangente un angle constant α, et que la tangente en P doive être encore parallèle à la tangente en M. Prenons l'équipollence

$$d\mathrm{OM} = e^{i\theta} ds.$$

On aura

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OM} + pe^{i(\alpha+\theta)} ds;$$

et le parallélisme de

$$d\mathrm{OP} = e^{i\theta} ds + pe^{i(\alpha+\theta)} (d^2 s + i\, ds\, d\theta) + e^{i(\alpha+\theta)} dp\, ds$$

et de

$$d\mathrm{OM} = e^{i\theta} ds$$

donnera

$$\begin{aligned} &pe^{i\alpha}(d^2 s + i\, ds\, d\theta) + e^{i\alpha} dp\, ds \\ &\quad = pe^{-i\alpha}(d^2 s - i\, ds\, d\theta) + e^{-i\alpha} dp\, ds, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$p\,ds = Ca^{-\theta},$$

C étant une constante, et $a = e^{\cot\alpha}$. Par conséquent,

$$\mathrm{MP} = Ca^{-\theta} e^{\iota(\alpha+\theta)}.$$

Donc toutes les droites MP qui sont coupées sous un angle égal et constant par les deux courbes M et P, sont respectivement équipollentes aux rayons vecteurs d'une spirale logarithmique.

32. Déterminer la direction de la droite MP, qui, partant du point M d'une courbe, coupe en deux parties égales la corde infiniment petite parallèle à la tangente en M.

Ce problème est le dernier de la *Géométrie de position* (p. 477 et suiv.). Il a été résolu par M. Bellavitis, dans son Mémoire intitulé *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica*, Padoue, 1835, avant la publication des solutions de MM. Transon (1841) et Dupin (1848).

Soient N, L les deux points de la courbe correspondants à $t + \omega$ et à $t - \varpi$. On aura

$$\mathrm{ON} = \mathrm{OM} + \omega\,.\,\mathrm{D}_t\mathrm{OM} + \frac{\omega^2}{2}\,.\,\mathrm{D}_t^2\mathrm{OM} + \ldots,$$

$$\mathrm{LN} = (\omega + \varpi)\,.\,\mathrm{D}_t\mathrm{OM} + \frac{\omega^2 - \varpi^2}{2}\,.\,\mathrm{D}_t^2\mathrm{OM} + \frac{\omega^3 + \varpi^3}{6}\,.\,\mathrm{D}_t^3\mathrm{OM} + \ldots;$$

et, pour que cette corde soit parallèle à la tangente $\mathrm{D}_t\mathrm{OM}$, il faudra qu'il en soit de même de la droite

$$3(\omega - \varpi)\,\mathrm{D}_t^2\mathrm{OM} + (\omega^2 - \omega\varpi + \varpi^2)\,\mathrm{D}_t^3\mathrm{OM} + \ldots,$$

qui, multipliée par la quantité réelle $\frac{1}{6}(\omega + \varpi)$, et ajoutée géométriquement à la droite $(\omega + \varpi) D_t OM$, donne la droite LN. Les accroissements ω, ϖ devant être infiniment petits, il faudra que $\omega - \varpi$ soit infiniment petit du second ordre, comme l'est $\omega^2 - \omega\varpi + \varpi^2$, qui se réduit à ω^2. En posant

$$\omega - \varpi = q\omega^2,$$

il faudra déterminer la quantité réelle q, de manière que l'on ait

$$3q . D_t^2 OM + D_t^3 OM = r . D_t OM,$$

r étant pareillement réel; après quoi la direction de la droite qui va de M au milieu de LN sera donnée par la relation

$$MN + ML = (\omega - \varpi) . D_t OM + \frac{1}{2}(\omega^2 + \varpi^2) . D_t^2 OM,$$

ou par celle-ci

$$MW = q . D_t OM + D_t^2 OM.$$

Prenons pour exemple la développante du cercle,

$$OM = \int e^{i\theta} \theta d\theta.$$

En supposant $d^2\theta = 0$, il faudra rendre réelle l'expression

$$3q(1 + \theta i) + (2i + \theta),$$

ce qui donnera $q = -\frac{2}{3\theta}$, et, par suite,

$$MW = \left(\frac{1}{3} + \theta i\right) e^{\theta i}.$$

Donc, si l'on prolonge le rayon de courbure SR de la développée MR, de $RW = \frac{1}{3}$ OR, la droite MW passera par le milieu de la corde de la courbe M, qui est parallèle à la tangente en M et infiniment voisine de cette tangente : théorème qui est vrai pour une courbe quelconque, et qui donne avec une grande facilité le rayon de courbure des développées des sections coniques, puisque dans ces courbes MW est le diamètre qui passe par M.

33. Déterminer la trajectoire obliquangle des ellipses concentriques et confocales, c'est-à-dire trouver la courbe M, dont la tangente ait une inclinaison égale à la demi-somme des inclinaisons des deux rayons vecteurs FM, F_1M, plus un angle constant.

Cette condition

$$\text{incl}\, d\text{OM} = \frac{1}{2}(\text{incl FM} + \text{incl F}_1\text{M}) + \alpha$$

est exprimée par la relation

$$d\text{OM} = pe^{i\alpha}\sqrt{\text{FM}.\text{F}_1\text{M}}.$$

Le mode de variation de la variable t, dont dépend OM, étant arbitraire, on peut donner à p une valeur réelle quelconque, propre à simplifier les formules. Posons

$$p = \frac{dt}{\sin\alpha}, \quad \text{FF}_1 = 4, \quad \text{FC} = 2.$$

L'équipollence

$$d\text{FM} = (\cot\alpha + i)\sqrt{(\text{CM}+2)(\text{CM}-2)}.dt,$$

intégrée par les règles connues, en se rappelant que $d\text{FM} = d\text{CM}$, donne

$$\text{CM} = ce^{t(\cot\alpha+i)} + \frac{1}{c}e^{-t(\cot\alpha+i)},$$

ou, en posant $e^{\cot\alpha} = a$,

$$\text{CM} = ca^t e^{it} + \frac{1}{ca^t e^{it}}.$$

On peut facilement établir le mode de génération de la trajectoire M au moyen de deux spirales logarithmiques, trouver le rayon de courbure de cette trajectoire, etc.

34. Terminons par deux problèmes faciles de Mécanique.

I. Un corps pesant est soumis à l'action de la gravité gi; par suite, sa vitesse sera donnée par la relation

$$\frac{d\mathrm{OM}}{dt} = git + c,$$

c étant la vitesse horizontale. Sa trajectoire sera déterminée par la relation

$$\mathrm{OM} = \frac{1}{2}git^2 + ct + a,$$

et, en choisissant convenablement la constante a, nous aurons

$$\mathrm{OM} = \frac{1}{2}gi\left(t - \frac{ci}{g}\right)^2.$$

La vitesse du corps au point M de sa trajectoire est équipollente à $\sqrt{2gi.\mathrm{OM}}$; donc la direction de la vitesse partage en deux parties égales l'angle compris entre la verticale et le rayon vecteur, et cette vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la distance du corps au foyer O de la parabole.

II. *Trouver le centre de gravité de l'arc de cercle* AMB.

Prenons pour origine des inclinaisons le rayon $\mathrm{OA} = 1$. On aura

$$\mathrm{OM} = e^{it},$$

et, en intégrant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \beta$, nous aurons

$$\int_0^\beta \mathrm{OM}.dt = -i(e^{i\beta} - 1) = -i.\mathrm{AB},$$

expression qui, divisée par la longueur β de l'arc, fait voir que la distance du centre de gravité au centre O est une quatrième proportionnelle à l'arc AMB, à la corde AB et au rayon OA.

35. Nous terminerons ici cet aperçu bien incomplet de la belle et féconde méthode créée par M. Bellavitis, qui permet de traiter par un procédé uniforme tous les problèmes de Géométrie et de Mécanique, depuis les premiers éléments jusqu'aux parties les plus élevées.

Les avantages que cette méthode présente pour les recherches géométriques dans le plan sont de tout point comparables à ceux que, sous le nom de théorie des quantités *imaginaires* ou *complexes*, elle offre à l'Analyse abstraite, à laquelle elle a fait faire de si grands pas. Elle se distingue des autres méthodes de Géométrie analytique, en ce qu'elle pose directement des relations entre les points du plan, indépendamment de tout système particulier de coordonnées, et le calcul même fait apercevoir comment on doit choisir ce système pour arriver à la solution le plus simplement possible.

Naturellement cette méthode, comme toutes les autres, demande un certain exercice pour pouvoir être maniée avec facilité. Mais en y consacrant le même temps qu'à l'étude des méthodes ordinaires, on reconnaîtrait sans peine qu'elle surpasse celles-ci en généralité comme en simplicité. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur la *Rivista di Giornali* que M. Bellavitis publie chaque année dans les *Atti del R. Istituto Veneto*, et dans laquelle il donne des solutions si élégantes des problèmes traités ailleurs par les anciennes méthodes. Nous nous proposons de communiquer plus tard aux *Nouvelles Annales* quelques-unes de ces solutions, relatives à des questions résolues dans ce Journal.