Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 312-329

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__312_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 894

(voir 2e série, t. VII, p. 479)

Étant donné, sur un plan P, *un triangle quelconque* ABC, *construire avec la règle et le compas le côté du triangle équilatéral dont* ABC *est la projection sur le plan* P. (LIONNET.)

Nous résumons ici la solution que donne M. E. Jasseron, élève de spéciales à Besançon.

Concevons dans l'espace le triangle équilatéral $A'B'C'$ dont le triangle ABC est la projection orthogonale; le centre O' du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ aura pour projection le point de concours O des médianes du triangle ABC. Ce point O est donc le centre d'une ellipse circonscrite au triangle ABC; le demi-grand axe de cette ellipse est donc égal au rayon du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$. On construira donc, par un procédé bien connu, le demi-axe d'une ellipse dont on connaît le centre *o*, et trois points A, B, C; soit a ce demi-axe; a sera le rayon du cercle circonscrit au triangle inconnu $A'B'C'$; le côté de ce triangle équilatéral inconnu sera donc $a\sqrt{3}$, et pourra être construit *au moyen de la règle et du compas.*

1[re] *Remarque.* — Il nous semble essentiellement utile de constater qu'un problème est résolu par la règle et le compas, lorsque la solution définitive résulte de la combinaison d'un nombre limité de droites et circonférences graphiques, bien que le raisonnement conducteur ait pu employer comme intermédiaires des lignes plus compliquées.

2[e] *Remarque.* — Si une ellipse circonscrite au triangle ABC doit avoir pour centre le point O de concours des médianes ou le centre de gravité du triangle, OA est la longueur du demi-diamètre conjugué à BC, et la tangente en B coupe le diamètre OA en un point T opposé au point A relativement au centre O et tel, que $OT = 2\,OA$; cette même tangente rencontre le diamètre conjugué à OA en un point V tel, que $OV = \frac{2}{3}BC$; par suite, le demi-diamètre dirigé suivant OV a pour longueur $\frac{BC}{\sqrt{3}}$; on connaît donc les directions et longueurs d'un système de diamètres conjugués, et l'on peut déterminer les longueurs des axes par l'un quelconque des procédés connus.

Note. — M. Andry a résolu la même question à peu près de la même manière.

Question 901

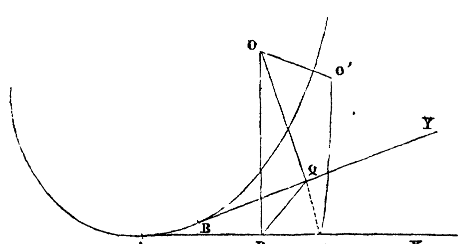
(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 45);

PAR M. MOREL,
Répétiteur à Sainte-Barbe.

Lorsqu'une ellipse en roulant sans glisser sur une droite a fait un tour entier, l'arc décrit par le foyer est égal à la circonférence ayant pour diamètre le grand axe.

On sait que la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes. Ce théorème est donc un cas particulier du suivant, dont nous trouvons l'énoncé dans le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, p. 25, et que nous allons démontrer :

Lorsque d'un point O, situé dans le plan d'une courbe plane, on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à cette courbe, la longueur d'un arc de la courbe, lieu des pieds de ces perpendiculaires, est égale à celle de la courbe engendrée par le point O, lié invariablement à la courbe donnée pendant que l'arc correspondant de celle-ci roule sans glisser sur une droite fixe.



Je prends la droite AX sur laquelle roule la courbe, et je prends une tangente BY assez voisine du point A pour que AB se confonde avec cette tangente. Soient P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les tangentes AX et BY. Il faut démontrer que $PQ = OO'$, O' étant la nouvelle position du point O, déterminé de la manière suivante : Dans le roulement, le point Q vient en un point Q' de la tangente tel que $AQ' = AB + BQ$; puis on a $O'Q' = OQ$ et perpendiculaire à AX.

Le triangle rectangle OPQ' nous donne $OP = OQ' \cos\alpha$, en négligeant les infiniment petits du premier ordre, $OP = OQ'$, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur.

Les deux triangles OPQ et $O'Q'O$ sont donc égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, donc $OO' = PQ$.

Question 902

(voir 2e série, t. VIII, p. 45);

PAR M. A. LAISANT,
Capitaine du Génie à Nantes.

Tout cube parfait augmenté de 3, 4 *ou* 5 *unités d'un ordre quelconque n'est pas un cube parfait.*

(JOS. JOFFROY.)

Nous proposons de remplacer l'énoncé ci-dessus par le suivant, plus général :

Tout cube parfait augmenté de 3, 4 *ou* 5 *unités d'ordres quelconques n'est pas un cube parfait.*

Cela revient à prouver l'impossibilité des équations

$$10^n + 10^{n'} + 10^{n''} = a^3 - b^3,$$
$$10^n + 10^{n'} + 10^{n''} + 10^{n'''} = a^3 - b^3,$$
$$10^n + 10^{n'} + 10^{n''} + 10^{n'''} + 10^{n^{\text{iv}}} = a^3 - b^3,$$
$$10^n + 10^{n'} + 10^{n''} + 10^{n'''} + 10^{n^{\text{iv}}} + 10^{n^{\text{v}}} = a^3 - b^3.$$

Or, a^2 est d'une des formes mq, $mq + 1$ ou $mq - 1$, b^2 également. Donc $a^3 - b^3$ est d'une des formes mq ou $mq \pm 1$ ou $mq \pm 2$: Mais les premiers membres des équations ci-dessus sont des formes $mq + 3$, $mq + 4$, $mq + 5$ ou $mq + 6$. Il y a donc impossibilité.

Ajoutons les énoncés suivants tout à fait analogues, et dont nous laisserons au lecteur le soin de développer les démonstrations :

1° Une sixième puissance augmentée de 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 unités d'ordres quelconques ne peut donner une sixième puissance;

2° La somme de deux sixièmes puissances ne peut être égale à celle de 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 unités d'ordres quelconques;

3° Dans le système duodécimal, la différence de deux cinquièmes puissances ne peut être égale à la somme de 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 unités d'ordres quelconques;

4° Dans le système de base B, si $B - 1$ est premier, la différence de deux puissances de degré $\frac{B-2}{2}$ ne peut être égale à la somme de 3, 4,..., $B - 4$ unités d'ordres quelconques;

5° Dans la même hypothèse, la différence de deux puissances de degré $B - 2$ ne peut être égale à la somme de 2, 3,..., $B - 3$ unités d'ordres quelconques, et la somme de deux puissances du même degré ne peut être égale à celle de 3, 4,..., $B - 2$ unités d'ordres quelconques.

6° Dans le système de base B, la différence de deux puissances de degré $\varphi(B - 1)$ ne peut être égale à la somme de 2, 3,..., $B - 3$ unités d'ordres quelconques, et la somme de deux puissances du même degré ne peut être égale à celle de 3, 4,..., $B - 2$ unités d'ordres quelconques;

7° Dans le système de base B, la somme (ou la différence) de deux puissances de degré $\frac{1}{2}\varphi(B-1)$ ne peut être égale à la somme de 3, 4,..., B — 4 unités d'ordres quelconques.

N. B. — Rappelons que, dans ce qui précède, $\varphi(x)$ représente le nombre des entiers premiers à x et non supérieurs à ce nombre.

Question 908

(voir 2e série, t. VIII, p. 47 et 174),

PAR M. MOREL,
Répétiteur à Sainte-Barbe.

Soit un quadrilatère inscriptible ABCD. *Si je considère un triangle formé par trois sommets de ce quadrilatère, les pieds des perpendiculaires abaissées du quatrième sommet sur les côtés du triangle considéré sont sur une ligne droite* XY. *Cela posé, démontrer :*

1° *Que les quatre droites* XY *que l'on peut construire en groupant trois à trois les quatre sommets* A, B, C, D *se coupent en un point* K;

2° *Que ce point est un point commun aux quatre cercles des neuf points des quatre triangles, et que, par suite, si un sommet se meut sur la circonférence circonscrite au triangle formé par les trois autres, le lieu du point* K *sera le cercle des neuf points du triangle.*

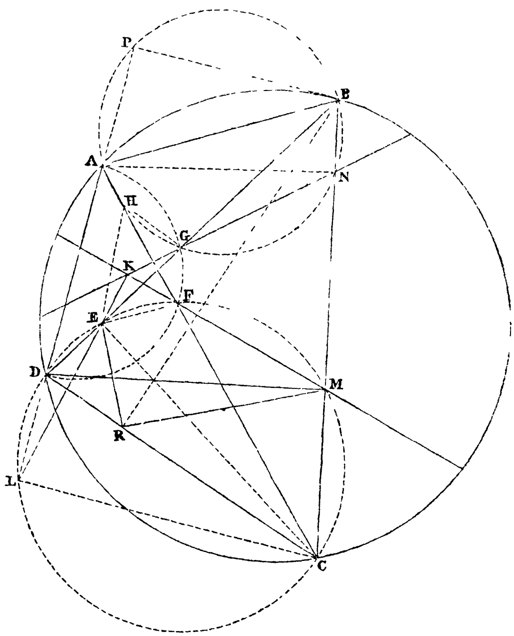
(E. LEMOINE.)

Pour démontrer ce théorème, nous ferons usage des deux lemmes suivants, qui nous feront connaître la position assez remarquable du point K.

Lemme I. — Lorsque, sur les côtés d'un quadrilatère inscrit comme cordes, on décrit des circonférences, les quatre points d'intersection de ces circonférences sont sur une même circonférence de cercle.

Lemme II. — Soit un triangle ABC et O le centre du cercle circonscrit, on a OAB = OBA, OAC = OCA, OBC = OCB; et réciproquement si l'on prend trois droites, telles que deux d'entre elles soient également inclinées sur l'un des côtés du triangle, ces trois droites se coupent en un même point, qui est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Cela posé, je vais démontrer que les quatre droites XY passent par le centre d'un cercle que je vais déterminer.



Soit le quadrilatère inscrit ABCD. Pour abaisser des perpendiculaires du point D sur les côtés du triangle

ABC, je décris sur DC comme diamètre une circonférence qui coupe la diagonale AC au point F, et la diagonale DB au point E; si sur AD comme diamètre je décris une circonférence, elle passera par le point F, et coupera la diagonale DB au point G, qui sera de même sur la circonférence dont le diamètre est AB. On voit ainsi que le quadrilatère EFGH est inscriptible. Je dis que les lignes XY passent par le centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère. En effet, l'angle KGE est égal à BGN ou au complément de ABN ; l'angle KEG est égal à BGN ou au complément de LDC : or LDC = ABN ; donc KGE = KEG.

On verrait de même que KHF = KFH (*).

De même, l'angle DAH = DBC ; donc AH + AP = BG, et par suite l'angle KAG, qui a pour mesure $\frac{\text{HG} + \text{HAP}}{2}$, est égal à l'angle KGH, qui a pour mesure $\frac{\text{HG}}{2} + \frac{\text{BG}}{2}$.

Enfin, on a

$$\text{KGF} + \text{NGF} = 2\,\text{dr.},$$
$$\text{KFG} + \text{MFG} = 2\,\text{dr.}$$

Or je dis que l'on a

$$\text{NGF} = \text{GFM}.$$

En effet, on a aussi

$$\text{EGF} + \text{KGE} + \text{FGN} = 2\,\text{dr.},$$
$$\text{MFG} + \text{HFG} + \text{KFH} = 2\,\text{dr.},$$

ou, en remplaçant KGE et KFH par leurs valeurs égales NAB et MDC, on doit avoir

$$\text{EGF} + \text{NAB} = \text{HFG} + \text{MDC}.$$

(*) Nous désignons ici par K le point d'intersection de deux quelconques des quatre lignes considérées, sans affirmer que ce point soit unique.

Or, de l'égalité des angles ABP et MDC, BAN et DCL, on tire

$$\frac{AP}{MC} = \frac{BN}{DL};$$

on a aussi

$$\frac{AH}{DE} = \frac{AP}{MC};$$

donc

$$\frac{AP + AH + BN}{MC + DE + DL} = \frac{AB}{CA}.$$

Donc la somme EFG + NAB = HFG + MDC, et, par suite, NGF = MFG ; donc KGF = KFG. Les droites PH, NG, MF se coupent donc en un point unique K, qui est le centre du cercle EFGH. C. Q. F. D.

Maintenant, si je prends les pieds des hauteurs E, R, M du triangle DBC, le point K est sur le cercle qui passe par ces trois points. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que EKM et MRE sont supplémentaires.

Or EKF $= 180^\circ - 2$KFE ; l'angle KFE a pour mesure $\frac{1}{2}$ EF $+ \frac{1}{2}$ FM.

Les lignes ER et RM étant également inclinées sur le diamètre DC, d'après un théorème connu, l'angle intérieur ERM aura pour mesure EF + FM ; donc ERM = 2KFE, et, par suite,

$$EKF + ERM = 180^\circ.$$

C. Q. F. D.

Question 916

(voir 2e série, t. VIII, p. 95);

PAR M^lle OLGA ERMANSKA,
Institutrice à Strasbourg.

Trouver l'enveloppe des ellipses d'aire constante dont les axes ont la même direction, ces ellipses étant concentriques.

(C. HARKEMA, de Saint-Pétersbourg.)

Je prends pour axes de coordonnées les axes communs à toutes les ellipses.

Soit $\pi\lambda^2$ la surface constante donnée, les carrés des demi-axes seront

$$a^2 \quad \frac{\lambda^4}{a^2}.$$

L'équation des ellipses sera, a désignant le paramètre variable,

$$\frac{h^4}{a^2}x^2 + a^2y^2 - h^4 = 0,$$

ou, comme a^2 n'est jamais nul,

$$(1) \qquad h^4x^2 + a^4y^2 - a^2h^4 = 0.$$

J'aurai l'équation du lieu en éliminant a entre l'équation (1) et l'équation (2), dérivée de la première par rapport à a, où je supprime le facteur $2a$,

$$(2) \qquad 2a^2y^2 = h^4,$$

d'où, en remplaçant a^2 par la valeur qui provient de cette équation dans l'équation (1),

$$4x^2y^2 = h^4.$$

Cette dernière équation représente les deux hyperboles équilatères conjuguées

$$xy = \frac{h^2}{2},$$

$$xy = -\frac{h^2}{2}.$$

On peut arriver géométriquement au même résultat.

Soient OA (*) la diagonale du rectangle construit sur les axes d'une des ellipses; M le point où OA coupe cette ellipse, je mène MP, MQ, parallèles à Oy et à Ox.

J'ai évidemment

$$\text{surface OPMQ} = \frac{1}{2} h^2.$$

Si maintenant je mène en M la tangente à l'ellipse, D et C étant les points où elle (la tangente) coupe Ox et Oy, j'ai, comme on voit facilement,

$$DM = CM.$$

De plus,

$$\text{surface OCD} = 2 \text{ surface OPMQ} = \text{constante}.$$

Donc DC est tangente en M à une branche d'hyperbole ayant Ox et Oy pour asymptotes : cela d'après un théorème connu.

Donc l'ellipse est tangente en M à cette même hyperbole.

Le lieu se compose donc de quatre branches d'hyperbole équilatères situées dans les angles yOx, $y'Ox$, yOx', $x'Oy'$.

On peut facilement trouver l'équation d'une de ces hyperboles.

En effet, l'équation de la branche située dans yOx est

$$xy = \text{MP}.\text{MQ} = \frac{h^2}{2}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Pour la branche située dans $y'Ox'$, on a

$$xy = (-\mathrm{MP})(-\mathrm{MQ}) = \frac{h^2}{2}.$$

Donc, enfin, le lieu se compose réellement de deux hyperboles équilatères.

Note du Rédacteur. — M. Fouret, qui nous a envoyé une solution très-simple de la même question, fait remarquer qu'on peut facilement résoudre sans plus de difficultés le problème plus général que voici :

Trouver l'enveloppe des ellipses concentriques à aire constante ayant deux diamètres conjugués communs en direction.

Note. — Nous avons reçu d'autres solutions très-bonnes de MM. Goisel; de Martres; Puibaraud, élève du lycée Napoléon; H. B., du collége Stanislas; de Capotin, du lycée de Douai; Paul Magué, du lycée de Lyon; Garet, du lycée de Clermont-Ferrand; Morel, répétiteur à Sainte-Barbe; Auguste Janin, de Grenoble (classe de M. Bernard); Willière.

Question 924

(voir 2e série, t. VIII, p. 96);

PAR M. ARTHUR MILLASSEAU,
Élève du lycée de Douai.

Par un point pris sur la développée d'une parabole, on mène les normales à la parabole. Par le point et les pieds de ces normales, on fait passer un cercle. On demande le lieu du centre de ce cercle, lorsque le point décrit la développée. (PAILLOTTE.)

Les pieds des normales à la parabole menées par un point $P(\alpha, \beta)$ sont donnés par les intersections de la parabole

$$y^2 - 2px = 0$$

avec la courbe

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0.$$

Les y des points d'intersection sont données par

$$y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0.$$

Cette équation doit avoir deux racines égales; donc le premier membre doit être divisible par

$$y + \sqrt{\frac{2}{3}p(\alpha - p)}.$$

Nous obtenons le quotient

$$y^2 - \sqrt{\frac{2}{3}p(\alpha - p)}\,y - \frac{4}{3}p(\alpha - p) = 0,$$

avec la condition

$$27p\beta^2 = 8(\alpha - p)^3.$$

Les pieds des normales sont donnés par l'intersection des deux courbes

$$y^2 - 2px = 0,$$

$$y^2 - \sqrt{\frac{2}{3}p(\alpha - p)}\,y - \frac{4}{3}p(\alpha - p) = 0,$$

ou par les intersections (B, C) des deux courbes

$$y^2 = 2px,$$

$$2px - \sqrt{\frac{2}{3}p(\alpha - p)}\,y - \frac{4}{3}p(\alpha - p) = 0.$$

Cette dernière équation est la polaire du point A d'intersection des deux tangentes aux points B et C, par rapport à la parabole. Or le quadrilatère ABCP est inscriptible; le centre se trouve donc au milieu de AP. Si nous appelons x_0, y_0 les coordonnées du point A, les coordonnées x, y du centre seront déterminées par

$$2x = \alpha + x_0,$$
$$2y = \beta + y_0.$$

Et nous avons, pour déterminer x_0, y_0, les deux équations

$$x_0 = -\frac{2}{3}(\alpha - p),$$
$$y_0 = \sqrt{\frac{1}{6}p(\alpha - p)}.$$

Pour avoir le lieu du centre, nous avons à éliminer α, β, x_0, y_0 entre les cinq équations

$$27p\beta^2 = 8(\alpha - p)^3,$$
$$2x = x_0 + \alpha,$$
$$2y = y_0 + \beta,$$
$$y_0 = \sqrt{\frac{1}{6}p(\alpha - p)},$$
$$x_0 = -\frac{2}{3}(\alpha - p).$$

Nous avons

$$\alpha = 2(3x - p),$$
$$2y = \beta + \sqrt{\frac{1}{2}p(2x - p)};$$

d'où

$$\beta = 2y - \sqrt{\frac{1}{2}p(2x - p)}.$$

Nous avons donc pour l'équation du lieu

$$27p\left[2y - \sqrt{\frac{1}{2}p(2x - p)}\right]^2 = 27.8(2x - p)^3.$$

Transportons l'origine au foyer de la parabole, nous aurons pour l'équation du lieu

$$16p^2y^4 - 8(p^2 + 64x^2)pxy^2 + x^2(64x^2 - p^2)^2 = 0.$$

Nous trouvons les deux courbes du troisième ordre

$$y^2 = \frac{(p + 8x)^2}{4p}x,$$

$$y'^2 = \frac{(p - 8x)^2}{4p}x.$$

La première possède un point double isolé; la seconde possède un point double ordinaire. Ces deux courbes touchent l'axe des y à l'origine. Les branches infinies sont des branches paraboliques ayant pour axe l'axe des y.

Cherchons le lieu du centre du cercle passant par les pieds des normales et par le sommet.

Quand on considère les normales menées d'un point (α, β), les pieds de ces normales peuvent être donnés par l'intersection de la parabole proposée

$$y^2 = 2px$$

avec le cercle

$$x^2 + y^2 - (p + \alpha)x - \frac{\beta y}{2} = 0.$$

Les coordonnées du centre sont ici

$$x = \frac{p + \alpha}{2},$$

$$y = \frac{\beta}{4}.$$

Or le point (α, β) est sur la développée; donc

$$27p\beta^2 = 8(\alpha - p)^3.$$

En éliminant α et β entre ces trois équations, nous aurons le lieu décrit par le centre : ce lieu est la courbe

$$y^2 = \frac{4(x-p)^3}{27p}.$$

Cette courbe est tout à fait analogue à la développée de la parabole.

Si nous cherchons le lieu du point A, nous trouvons

$$y^2 + \frac{p}{4}x = 0,$$

c'est-à-dire une parabole située à gauche de l'axe des y et dont le paramètre est le huitième du paramètre de la parabole proposée. Nous concluons de là le théorème suivant :

Si un point se meut sur la développée et si l'on mène les normales à la parabole par ce point, le pôle de la droite qui joint les pieds des normales se meut sur une parabole homothétique de la parabole proposée et dont le paramètre est le huitième de celui de la première parabole.

Reprenons l'équation de la droite BC

$$2px - \sqrt{\frac{2}{3}p(\alpha - p)}\,y - \frac{4}{3}p(\alpha - p) = 0.$$

Dans cette équation, on peut considérer $(\alpha - p)$ comme une indéterminée : soit $\alpha - p = \lambda^2$. L'équation de BC devient

$$\frac{4}{3}p\lambda^2 + \sqrt{\frac{2}{3}p}\,\lambda y - 2px = 0.$$

L'enveloppe de cette droite est

$$\frac{2}{3}py^2 + \frac{4}{3}p \cdot 2px = 0,$$

ou

$$y^2 + 4px = 0.$$

Nous avons encore une parabole située à gauche de Oy et dont le paramètre est double de celui de la parabole proposée.

Note. — Ont résolu la même question : MM. Brocard, sous-lieutenant du Génie à Metz; Niebylowski, élève de l'École Normale; Prosper Pélissier, élève du collége Chaptal; Andry, élève à Sainte-Barbe; Paul Endrès, élève du lycée de Douai.

Question 934

(voir 2e série, t. VIII, p. 240);

PAR MM. BROCARD ET GRASSAT,
Sous-lieutenants du Génie à Metz.

Les centres de courbure d'une spirale d'Archimède qui correspondent à des points situés sur un même rayon vecteur appartiennent à une même ellipse.

(G. FOURET.)

Prenons pour origine le pôle de la courbe, pour axe des x l'axe polaire, et pour axe des y une droite perpendiculaire menée par l'origine.

Désignons par α l'angle que fait la droite fixe OA avec Ox; par β l'angle de la normale en un point M de la courbe avec Ox; par ρ le rayon vecteur OM, par R le rayon de courbure en M. On aura

$$x = \rho\cos\alpha - R\cos\beta,$$
$$y = \rho\sin\alpha - R\sin\beta.$$

Mais

$$\rho = a\omega,$$

$$R = a\frac{(\omega^2+1)\sqrt{\omega^2+1}}{\omega^2+2}$$

et

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} - \mathrm{V},$$

V étant l'angle que fait la tangente en M avec le rayon vecteur. Si l'on désigne $\cos a$ par m et $\sin a$ par n, on aura finalement

$$x = ma\omega - a\frac{\omega^2+1}{\omega^2+2}(m\omega + n),$$

$$y = na\omega - a\frac{\omega^2+1}{\omega^2+2}(n\omega - m),$$

ou encore

$$x = \frac{a}{\omega^2+2}[m\omega - n(\omega^2+1)],$$

$$y = \frac{a}{\omega^2+2}[n\omega + m(\omega^2+1)].$$

En changeant ω en $\omega + 2\mathrm{K}\pi$, on aura les divers points cherchés. En éliminant ensuite K ou ω, on aura une courbe qui les renferme. Or, on tire de ces équations les suivantes :

$$my - nx = \frac{a(\omega^2+1)}{\omega^2+2},$$

$$mx + ny = \frac{a\omega}{\omega^2+2}.$$

Par un changement des axes de coordonnées, on peut ramener ces équations à prendre les formes

$$\mathrm{X} = \frac{a(\omega^2+1)}{\omega^2+2},$$

$$\mathrm{Y} = \frac{a\omega}{\omega^2+2}.$$

Eliminant ω, on a l'ellipse

$$\mathrm{Y}^2 = (\mathrm{X} - a)(a - 2\mathrm{X}).$$