PARPAITE

Note sur la règle des signes de Descartes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 269-272

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__269_2>

NOTE SUR LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES;

PAR M. PARPAÏTE,
Élève à l'École Normale supérieure.

On sait que si une équation algébrique mise sous la forme ordinaire renferme trois termes consécutifs

$$A_{n+1}\,x^{n+1},\quad A_n\,x^n,\quad A_{n-1}\,x^{n-1},$$

dont les coefficients soient les termes consécutifs d'une progression géométrique, elle a au moins deux racines imaginaires. On démontre ce théorème en multipliant le premier membre de l'équation par $(x-a)$ et en profitant de l'indétermination de a pour produire des lacunes dans l'équation $f(x)(x-a)=0$.

Cherchons si en multipliant le premier membre de l'équation par un polynôme du deuxième degré, on pourrait profiter de l'indétermination des coefficients pour amener des lacunes dans le produit résultant; quelles conditions les coefficients de l'équation doivent remplir pour cela; quelles conclusions on peut en tirer pour le nombre des racines imaginaires.

Soit l'équation donnée

$$0=f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_nx^{m-n}+A_{n+1}x^{m-n-1}+\ldots$$

multiplions par

$$\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma.$$

Trois termes consécutifs du produit seront :

$$\begin{aligned}&(A_{n+2}\alpha+A_{n+1}\beta+A_n\gamma)\,x^{m-n},\\+&(A_{n+3}\alpha+A_{n+2}\beta+A_{n+1}\gamma)\,x^{m-n-1},\\+&(A_{n+4}\alpha+A_{n+3}\beta+A_{n+2}\gamma)\,x^{m-n-2}.\end{aligned}$$

Ces trois termes consécutifs disparaîtront si l'on a

$$\begin{aligned}A_{n+2}\alpha+A_{n+1}\beta+A_n\gamma&=0,\\A_{n+3}\alpha+A_{n+2}\beta+A_{n+1}\gamma&=0,\\A_{n+4}\alpha+A_{n+3}\beta+A_{n+2}\gamma&=0.\end{aligned}$$

On voit qu'il sera possible de choisir α, β, γ dans un rapport tel, que ces trois équations soient satisfaites simultanément, si l'on a

$$D_n=\begin{vmatrix}A_n & A_{n+1} & A_{n+2}\\A_{n+1} & A_{n+2} & A_{n+3}\\A_{n+2} & A_{n+3} & A_{n+4}\end{vmatrix}=0.$$

Donc, étant donnée une équation $f(x) = 0$, que l'on forme les divers déterminants D_n, si l'un au moins est nul, on peut faire disparaître trois termes consécutifs de l'équation $f(x)\varphi(x) = 0$.

Cela posé, on calculera les rapports des inconnues α, β, γ; on en déduira les valeurs des coefficients de x^{m-n+1} et de x^{m-n+3} ; on peut facilement les mettre sous la forme de déterminants, à un facteur près : nous ne nous y arrêterons pas.

Si les coefficients de ces puissances sont de signes contraires, l'équation $f(x)\varphi(x) = 0$ a au moins deux racines imaginaires; il faudra voir si les valeurs de α, β, γ rendent les racines de $\varphi(x)$ réelles ou imaginaires avant de tirer une conclusion relative à l'équation $f(x) = 0$.

Si les coefficients de ces puissances sont de même signe, on peut affirmer que l'équation $f(x)\varphi(x) = 0$ a quatre racines imaginaires au moins, par suite que l'équation $f(x) = 0$ en a au moins deux.

Nous nous appuyons sur ce théorème bien connu, qui découle de la règle des signes de Descartes :

Une équation a au moins $2n$ *racines imaginaires :*

1° *Si entre deux termes il en manque* $2n$*;*

2° *Si entre deux termes de signes contraires il en manque* $2n+1$;

3° *Si entre deux termes de même signe il en manque* $2n-1$.

Note du Rédacteur. — On peut évidemment étendre ces considérations au cas où $\varphi(x)$ serait du troisième, du quatrième degré, etc. On arriverait ainsi à une série de transformations qui permettraient de juger, par les lacunes produites, du nombre des racines imaginaires de l'équation.

Nous nous arrêterons à cette indication, à cause de la complication des énoncés.

La règle de M. Parpaite est d'ailleurs très-particulière et d'une application peu fréquente, car il arrivera très-rarement que cinq coefficients consécutifs satisfassent à la relation $D_n = 0$.