NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. HABICH

Note sur une méthode de transformation des surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 253-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__253_1>

NOTE SUR UNE MÉTHODE DE TRANSFORMATION DES SURFACES;

Par M. E. HABICH.

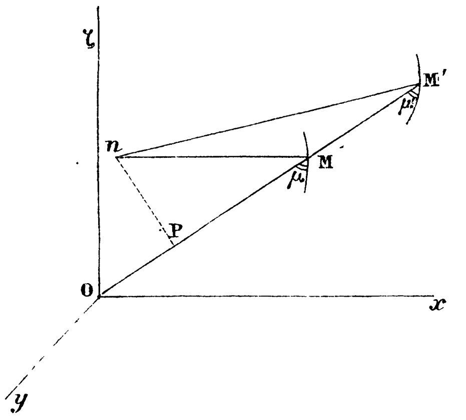
Si les normales aux points correspondants M et M′ des surfaces (A) et (A′) se rencontrent en un même point N, les normales aux sections planes de ces surfaces faites suivant la droite MM′ vont se rencontrer aux points n qui se trouvent tous dans un même plan perpendiculaire à MM′ et passant par le point N.

Réciproquement, si dans deux sections planes faites suivant MM′ les normales aux courbes planes de ces sections se rencontrent aux points n et n' situés sur un même plan perpendiculaire à MM′, dans ce cas les normales aux surfaces (A) et (A′) vont se rencontrer aussi en un point N, situé dans ce dernier plan, et ayant pour projections sur les plans des sections les points n et n'.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} F_1(r, \theta, \varphi) = 0, \\ F_2(r', \theta, \varphi) = 0, \end{cases}$$

les équations d'une surface (A) et de sa transformée (A′), dont les points correspondants se trouvent sur une même droite passant par un point fixe O, que nous avons pris pour pôle des coordonnées.



Soient (a) et (a') les courbes des sections planes faites dans les surfaces (A) et (A′), par un plan passant par le rayon vecteur OMM′; en appelant μ et μ' les angles formés par les courbes (a) et (a') avec le rayon vecteur, et p la distance OP du pôle O au pied P de la perpendiculaire nP abaissée sur ce rayon vecteur du point de concours des normales en M et M′ aux courbes planes (a) et (a'), on trouve

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{OM'} - \mathrm{OP}}{\mathrm{OM} - \mathrm{OP}} = \frac{r' - p}{r - p} = \frac{\operatorname{tang} \mu'}{\operatorname{tang} \mu} = \frac{r'}{r} \frac{dr}{dr'}.$$

Cette relation (2) nous fait voir que, lorsque le rapport $\frac{dr}{dr'}$ reste le même pour deux sections planes faites suivant le rayon vecteur OMM′, $\mathrm{OP} = p$ ne varie pas dans ces sections, et la condition pour que les points n soient dans un même plan perpendiculaire à MM′ se trouve remplie.

Les courbes (a) et (a') des sections planes faites suivant OMM′ sont déterminées par les équations (1), conjointement avec celle du plan passant par le pôle O,

$$(3) \qquad (m \cos\varphi + n \sin\varphi) \operatorname{tang}\theta = \pm 1.$$

La condition de passer par le rayon vecteur déterminé OMM′ réduit les deux paramètres arbitraires m et n à un seul; et le rapport de θ et de φ varie avec ce paramètre, c'est-à-dire avec le déplacement du plan de la section autour du rayon vecteur OMM′.

Le rapport $\frac{dr}{dr'}$, déduit des équations (1) et (3), dépend de r, r', φ, θ, $\frac{d\varphi}{d\theta}$, et par suite du paramètre variable de l'équation (3).

Pour que ce rapport $\frac{dr}{dr'}$ reste invariable pour toutes les sections, il faut qu'il soit indépendant du paramètre arbitraire de l'équation (3), ce qui aura lieu si son expression ne contient pas ni θ, ni φ, ni $\frac{d\varphi}{d\theta}$, et soit uniquement fonction de r et r'; d'où l'on conclut que *la transformation la plus générale, dans le cas considéré, est* *déterminée par une relation quelconque entre les rayons vecteurs correspondants r et r',*

$$(4)\qquad f(r, r') = 0.$$

Citons comme application particulière la transformation par rayons vecteurs réciproques, où l'on a

$$rr' = \text{const.},\quad \text{d'où}\quad p = \frac{1}{2}(r + r'),$$

et par suite, etc.; et la transformation définie par

$$r' - r = \text{const.} = \pm m,\quad \text{d'où}\quad p = 0,$$

ce qui conduit à l'énoncé suivant :

Si sur les rayons vecteurs émanant d'un pôle O, *on porte, à partir d'une surface donnée* (A), *une longueur constante m; on formera une autre surface donnée* (A') *qui est la conchoïde de* (A) *par rapport au pôle* O; *et les deux surfaces jouissent de la propriété que leurs normales aux points correspondants* M *et* M' *se rencontrent en un même point* N *du plan, passant par le pôle* O *et perpendiculaire au rayon vecteur* OMM'.

Avant d'aller plus loin, remarquons qu'en ajoutant aux deux équations (1) une troisième équation entre φ et θ,

$$(5)\qquad F_3(\varphi, \theta) = 0,$$

qui exprime en général une surface unique ayant son sommet en O [et en particulier un plan (3)], les relations (1) et (5) détermineront deux courbes, intersections communes des surfaces (1) avec le cône (5).

En éliminant φ et θ entre ces équations (1) et (5) on obtiendra une relation de la forme (4), ce qui montre que, étant données deux courbes situées sur une même surface conique (ou un plan) ayant son sommet au pôle de transformation, il est possible en général de passer d'une de ces courbes à l'autre au moyen de la transformation de la forme (4).

Si l'on a seulement les deux équations (1), pour arriver à la relation (4), il faut qu'on puisse éliminer de ces deux équations *à la fois* les deux variables indépendantes φ et θ, ce qui demande que les équations (1) affectent une forme particulière.

Proposons-nous maintenant de déterminer la forme de la fonction (4), de telle manière, que les lignes de courbure des surfaces (A) et (A') soient des courbes correspondantes.

Cette question a été traitée d'une *manière générale* par M. Liouville. L'illustre géomètre, en s'appuyant sur les parties les plus élevées de la géométrie analytique, a démontré que la transformation par rayons vecteurs réciproques et l'homothétie jouissent seules de la propriété de conserver les angles des éléments correspondants linéaires et superficiels des figures transformées, et par conséquent de la propriété que nous avons énoncée (*).

Je me propose de démontrer ici, par des procédés élémentaires, que, *dans les transformations définies par la relation* (4), *l'homothétie et l'inversion jouissent seules de la propriété de faire correspondre les lignes de courbure de deux surfaces transformées.*

Pour cela je commencerai par établir que ces deux modes de transformation appliqués aux courbes planes jouissent seuls de la propriété : « Que les centres de courbure des lignes transformées se trouvent sur une même droite passant par le pôle de transformation. »

(*) Dans un article inséré dans le Cahier XLII (1867) du *Journal de l'École Polytechnique*, M. Haton de la Goupillière a démontré ces propriétés en se basant sur les principaux théorèmes de la théorie des surfaces orthogonales.

Considérons en effet deux cercles de rayons R et R′, dont les centres K et K′ se trouvent sur une même droite passant par le pôle O et à des distances $OK = d$ et $OK' = d'$ de ce pôle; les équations de ces cercles seront

$$R^2 = r^2 + d^2 + 2rd\cos\theta,$$
$$R'^2 = r'^2 + d'^2 + 2r'd'\cos\theta.$$

Éliminant entre ces deux équations $\cos\theta$ pour arriver à la relation (4), on obtient, réduction faite,

$$(6) \qquad (rr' - dd')(rd' - dr') + R'^2 dr - R^2 d'r' = 0,$$

d'où l'on reconnaît que, pour transformer deux cercles de manière que leurs centres se trouvent sur une même droite passant par le pôle de transformation, et cela *indépendamment* de la grandeur de leurs rayons R et R′, il faut satisfaire à l'équation (6) dans laquelle on aurait supposé $R = 0$ et $R' = 0$, ce qui donne

$$rr' = dd' \quad \text{et} \quad \frac{r}{r'} = \frac{d}{d'},$$

c'est-à-dire que les deux cercles doivent être semblables ou réciproques par rapport au pôle de transformation.

Considérons maintenant deux courbes quelconques, et remplaçons-les aux points M et M′ par leurs cercles osculateurs; pour que les centres de ces cercles se trouvent sur une même droite passant par le pôle, indépendamment de la grandeur de leurs rayons, c'est-à-dire indépendamment de la forme particulière que peuvent affecter les courbes données, il faut que la transformation soit l'une des deux citées plus haut; donc, etc.

Ces préliminaires établis, revenons à la question.

Supposons que les surfaces (A) et (A′) sont effectivement telles, que leurs lignes de courbure se correspondent. Soient M et M_1 deux points infiniment voisins de la ligne de courbure de la surface (A), et M' et M'_1 leurs correspondants sur la surface (A').

Menons par les rayons vecteurs OMM', $OM_1M'_1$ et les normales correspondantes aux surfaces deux plans; d'après l'hypothèse ces plans vont se rencontrer suivant la droite qui réunit les centres de courbure K et K' des sections principales MM_1 et $M'M'_1$, et qui passe par le pôle de transformation O. Il suit de là que, lorsque les lignes de courbure se correspondent, les centres de courbure des sections principales se trouvent sur une même droite passant par le pôle de transformation.

Maintenant, comme la relation (4) est indépendante de la section plane faite suivant le rayon vecteur, elle est la même pour toutes ces sections, et, par suite, pour la connaître, il suffit de la déterminer pour une seule section.

Pour y arriver, faisons passer un plan par le rayon vecteur OMM' et les tangentes aux lignes de courbure, correspondantes aux points M et M'; ce plan coupera les surfaces (A) et (A') suivant deux courbes planes dont les centres de courbure seront les projections des centres de courbure K et K' des sections principales considérées, sur leur plan osculateur commun; et comme les centres de courbure K et K' se trouvent sur une même droite passant par le pôle O, il en sera de même pour les centres de courbure de la section plane de deux surfaces. On pourrait dire la même chose de l'autre section principale.

Par conséquent, d'après ce que nous avons démontré plus haut, les centres de courbure des courbes planes se trouvent sur une même droite passant par le pôle de transformation, dans deux cas :

Lorsque les courbes sont semblables par rapport au pôle, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\frac{r'}{r} = \text{const.};$$

Et lorsque les courbes sont réciproques, c'est-à-dire quand

$$rr' = \text{const}.$$

Donc notre théorème se trouve démontré.