NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. PAINVIN

Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 145-162

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__145_0>

DISCUSSION DE L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(suite, voir 2e série, t. VII, p. 137);

PAR M. L. PAINVIN.

§ VI. — *L'équation en λ a deux couples de racines égales.*

30. Lorsque l'équation en λ a deux couples de racines égales, les trois cas suivants peuvent se présenter :

PREMIER CAS. — *Les deux cônes* (A) *et* (B) *correspondant respectivement aux racines doubles sont des cônes proprement dits.*

Les deux surfaces ont en commun l'arête AB *qui joint les sommets des deux cônes; elles se touchent aux points* A *et* B.

Réciproquement, *lorsque les deux surfaces se touchent en deux points distincts d'une génératrice commune, l'équation en λ a deux racines doubles, et les cônes correspondant à ces racines doubles sont des cônes proprement dits.*

Les points A *et* B *sont les seuls points ayant même plan polaire par rapport aux deux surfaces; le plan polaire de* A *est le plan* BAD, *tangent commun en* A; *le plan polaire de* B *est le plan* ABC, *tangent commun en* B *aux deux surfaces.*

La courbe d'intersection des deux surfaces se compose de la génératrice commune AB *et d'une courbe rencontrée en trois points par un plan quelconque; cette courbe* *est donc du troisième ordre, c'est la* CUBIQUE GAUCHE.

Les droites AD *et* BC, *intersections des cônes* (A) *et* (B) *par les plans tangents communs aux deux surfaces, sont les tangentes en* A *et* B *à la courbe gauche.*

Un plan quelconque, passant soit par AD, *soit par* BC, *coupe les deux snrfaces suivant deux coniques osculatrices, le contact est du second ordre.*

DEUXIÈME CAS. — *L'un des cônes,* (A) *par exemple, est un cône proprement dit; le second cône* (B) *se réduit à un système de deux plans.*

Les deux surfaces se touchent en trois points, et ne sont pas circonscrites l'une à l'autre; elles se touchent d'abord au point A, *sommet du cône proprement dit; le plan tangent commun coupe les deux surfaces suivant les deux mêmes droites* AB *et* AD. *Le système de ces deux droites est la première des sections planes communes aux deux surfaces; le plan tangent commun* BAD *est un des plans du système* (B). *L'autre section plane est une conique proprement dite, située dans le second plan* BDC *du systéme* (B) *et sur le cône ayant son sommet en* A. *Cette conique rencontre l'intersection des deux plans en* B *et* D; *en ces points elle est tangente aux droites* BC *et* DC, *intersections de son plan avec les plans tangents au cône* (A) *suivant les droites* AB *et* AD. *Les plans* ABC *et* ADC *touchent respectivement en* B *et* D *les deux surfaces.*

Tous les points de la droite BD, *intersection des deux plans du système* (B), *ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces; ces plans polaires passent par la droite* AC, *intersection des plans tangents communs aux deux surfaces en* B *et* D. *Le sommet* A *a même plan polaire par rapport aux deux surfaces; ce plan polaire est le plan tangent commun en* A.

Troisième cas. — *Les deux cônes* (A) *et* (B) *se réduisent à un système de deux plans.*

Les deux surfaces se coupent suivant quatre droites, c'est-à-dire sont circonscrites au quadrilatère ADBCA *formé par les intersections des plans de chaque système entre eux, abstraction faite des arêtes de ces systèmes.*

Les deux surfaces se touchent en quatre points; les plans ADB, ACB, CBD, DAC *touchent respectivement les deux surfaces aux points* D, C, B, A.

Tous les points de l'arête AB *ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces : ces plans passent par* CD; *tous les points de l'arête* CD *ont également même plan polaire par rapport aux deux surfaces : ces plans passent par* AB.

31. Prenons les sommets des deux cônes correspondant respectivement aux racines doubles pour sommets A et B du tétraèdre de référence, désignons par λ_0 et λ_1 les racines doubles de l'équation en λ.

Si les équations des deux surfaces sont

$$(1)\qquad \begin{cases} (S) & A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + \ldots + 2A_{34}zt = 0, \\ (T) & B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + \ldots + 2B_{34}zt = 0, \end{cases}$$

l'équation du cône correspondant à la racine double λ_0 sera

$$(B_{11} + \lambda_0 A_{11})x^2 + (B_{22} + \lambda_0 A_{22})y^2 + \ldots + 2(B_{34} + \lambda_0 A_{34})zt = 0;$$

ce cône devant avoir son sommet en A, son équation ne devra renfermer que les variables y, z, t; on aura donc

$$(2)\qquad \frac{B_{11}}{A_{11}} = \frac{B_{12}}{A_{12}} = \frac{B_{13}}{A_{13}} = \frac{B_{14}}{A_{14}} = -\lambda_0.$$

De même, le cône correspondant à la racine λ_1 devant avoir son sommet en B, son équation ne devra renfermer que les variables x, z, t; on aura, par suite,

$$(3) \qquad \frac{B_{21}}{A_{21}} = \frac{B_{22}}{A_{22}} = \frac{B_{23}}{A_{23}} = \frac{B_{24}}{A_{24}} = -\lambda_1.$$

Puisque les racines λ_0 et λ_1 sont différentes, on conclut d'abord de la comparaison des relations (2) et (3) :

$$A_{12} = 0, \quad B_{12} = 0;$$

les équations des deux surfaces s'écriront alors

$$(4)\left\{\begin{array}{l} A_{11}x^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + A_{22}y^2 \\ \qquad + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + A_{33}z^2 + 2A_{34}zt + A_{44}t^2 = 0, \\ -\lambda_0(A_{11}x^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt) \\ -\lambda_1(A_{22}y^2 + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt) + B_{33}z^2 + 2B_{34}zt + B_{44}t^2 = 0. \end{array}\right.$$

Les équations des deux cônes sont respectivement

$$(5)\left\{\begin{array}{l} [A]\ (\lambda_0 - \lambda_1)(A_{22}y^2 + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt) + (B_{33} + \lambda_0 A_{33})z^2 \\ \qquad\qquad + 2(B_{34} + \lambda_0 A_{34})zt + (B_{44} + \lambda_0 A_{44})t^2 = 0, \\ [B]\ (\lambda_1 - \lambda_0)(A_{11}x^2 + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt) + (B_{33} + \lambda_1 A_{33})z^2 \\ \qquad\qquad + 2(B_{34} + \lambda_1 A_{34})zt + (B_{44} + \lambda_1 B_{44})t^2 = 0; \end{array}\right.$$

et l'équation en λ devient

$$(6)\ (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31}(\lambda - \lambda_0) & A_{32}(\lambda - \lambda_1) & B_{33} + \lambda A_{33} & B_{34} + \lambda A_{34} \\ A_{41}(\lambda - \lambda_0) & A_{42}(\lambda - \lambda_1) & B_{43} + \lambda A_{43} & B_{44} + \lambda A_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Il faut, en outre, exprimer que le déterminant qui figure dans cette équation s'annule pour $\lambda = \lambda_0$ et $\lambda = \lambda_1$; on a ainsi les deux équations suivantes, qui doivent être vérifiées simultanément

$$(7)\qquad A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32}(\lambda_0-\lambda_1) & B_{33}+\lambda_0 A_{33} & B_{34}+\lambda_0 A_{34} \\ A_{42}(\lambda_0-\lambda_1) & B_{43}+\lambda_0 A_{43} & B_{44}+\lambda_0 A_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(7')\qquad A_{22}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} \\ A_{31}(\lambda_1-\lambda_0) & B_{33}+\lambda_1 A_{33} & B_{34}+\lambda_1 A_{34} \\ A_{41}(\lambda_1-\lambda_0) & B_{43}+\lambda_1 A_{43} & B_{44}+\lambda_1 A_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Ces deux relations peuvent être vérifiées de quatre manières différentes : en égalant à zéro le premier facteur de la relation (7), on écrit que les deux surfaces passent par le sommet A ; en égalant à zéro le second facteur, on écrit que le cône (A) se réduit à deux plans.

Nous aurons donc à examiner les trois cas suivants :

1° Les deux cônes (A) et (B) sont des cônes proprement dits ;

2° Un des cônes est un cône proprement dit, et l'autre se réduit à deux plans ;

3° Les deux cônes (A) et (B) se réduisent respectivement à un système de deux plans.

I. *Les deux cônes* (A) et (B) *sont des cônes proprement dits.*

32. Dans ce cas, on a

$$(1^\circ)\qquad A_{11}=0,\quad A_{22}=0;$$

et on voit que la droite AB est tout entière sur les deux surfaces, car les équations (4) sont alors vérifiées par $z=0$ et $t=0$.

Les deux surfaces se touchent en A ($y=0$, $z=0$, $t=0$) ; le plan tangent commun est $f'_x=0$, ou

$$A_{13}z+A_{14}t=0;$$

elles se touchent également en B ($x = 0$, $z = 0$, $t = 0$); le plan tangent commun est $f'_y = 0$, ou

$$A_{23}z + A_{24}t = 0.$$

Or ces deux plans tangents en des points différents d'une même génératrice ne peuvent pas se confondre si les surfaces ne sont pas des cônes; on peut d'ailleurs le constater directement à l'aide des équations (4). Nous pouvons donc prendre le premier de ces plans pour face ABD du tétraèdre de référence, et le second pour face ABC; ce qui revient à supposer

$$(2^\circ) \qquad A_{14} = 0, \quad A_{23} = 0.$$

Nous remarquerons, après avoir introduit les hypothèses (1°) et (2°) dans les équations (4), que le coefficient A_{13} ne peut pas être nul, autrement les surfaces se réduiraient à des cônes. Ainsi les équations des deux surfaces pourront se ramener à cette première forme

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} az^2 + ct^2 + 2bzt + 2dyt + 2xz = 0, \\ a_1z^2 + c_1t^2 + 2b_1zt + 2d_1yt + 2xz = 0. \end{array} \right.$$

Ces deux équations nous montrent que « les deux sur-
» faces ont en commun la droite AB, et elles se touchent
» aux points A et B, sommets respectifs des deux cônes
» passant par leur courbe d'intersection. »

Réciproquement : « Lorsque deux surfaces du second
» ordre se touchent en deux points distincts d'une géné-
» ratrice commune, l'équation en λ a deux racines dou-
» bles, et les cônes correspondant à ces racines doubles
» sont des cônes proprement dits. »

La démonstration de cette réciproque n'offre pas de difficulté.

33. On peut encore simplifier les équations (8) des deux surfaces.

Le cône ayant son sommet en A a pour équation

$$(9)\quad (a-a_1)z^2+(c-c_1)t^2+2(b-b_1)zt+2(d-d_1)yt=0;$$

ce cône touche le plan ABC, ou $t=0$, suivant l'arête AB; de plus, il coupe le plan ABD, ou $z=0$, suivant les deux droites

$$(c-c_1)t^2+2(d-d_1)yt=0.$$

On ne peut pas supposer $d=d_1$, car alors le cône (9) se réduirait à deux plans; le cône (9) coupe donc le plan ABD suivant deux droites distinctes, dont l'une est AB; prenons la seconde pour arête AD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposons

$$(1^\circ)\qquad c_1=c.$$

Le plan tangent à ce cône suivant AD sera distinct du plan ADB; nous pourrons alors le prendre pour la face ADC du tétraèdre de référence, c'est-à-dire que le plan $y=0$ devra toucher le cône (9), ce qui donne

$$(2^\circ)\qquad b_1=b.$$

Eu égard aux hypothèses faites, l'équation du cône ayant son sommet en B devient

$$(10)\qquad \frac{ad_1-a_1d}{d_1-d}z^2+ct^2+2bzt+2xz=0.$$

Ce cône touche le plan ABD, ou $z=0$, suivant la droite AB, et il coupe le plan ABC, ou $t=0$, suivant les deux droites

$$\frac{ad_1-a_1d}{d_1-d}z^2+2xz=0.$$

Ces droites sont distinctes, l'une d'elles est BA; nous prendrons la seconde pour arête BC du tétraèdre de référence, ce qui revient à supposer

$$(3^\circ) \qquad \frac{a_1}{a} = \frac{d_1}{d} = k.$$

Le plan tangent à ce cône suivant BC sera distinct du plan BCA, nous pourrons alors le prendre pour la face CBD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire que le plan $x = 0$ devra toucher le cône (10), ce qui donne

$$(4^\circ) \qquad b = 0, \quad \text{d'où} \quad b_1 = 0.$$

Ainsi : A et B étant les sommets des deux cônes, AB la génératrice commune, BAD le plan tangent commun aux deux surfaces en A, ABC le plan tangent commun en B; de plus, AB et AD étant la section du cône (A) par le plan BAD, et DAC étant le plan tangent à ce cône suivant l'arête AD; BA et BC étant la section du cône (B) par le plan BAC, et BCD étant le plan tangent à ce cône suivant l'arête BC; *les équations des deux surfaces, rapportées à ce tétraèdre, se présenteront sous la forme :*

$$(11) \qquad \begin{cases} [S] & 2xz + ct^2 + az^2 + 2dyt = 0, \\ [T] & 2xz + ct^2 + k(az^2 + 2dyt) = 0. \end{cases}$$

Les équations des cônes (A) et (B) seront respectivement

$$(12) \qquad \begin{cases} [A] & az^2 + 2dyt = 0, \\ [B] & ct^2 + 2xz = 0; \end{cases}$$

et l'équation en λ devient

$$(13) \qquad (\lambda + 1)^2(\lambda + k)^2 = 0.$$

Remarque. — On trouve une grande analogie entre les équations réduites (11) du présent numéro et les formes réduites (20) du n° 22; il y a néanmoins pour ces deux cas une différence essentielle : dans le cas actuel, les deux surfaces et les deux cônes ont une génératrice commune, ce qui n'a pas lieu dans l'hypothèse examinée au n° 22.

34. Les plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0) par rapport à chacune des surfaces (11), ont respectivement pour équations

$$(14)\left\{\begin{array}{l} z_0 x + dt_0 y + (x_0 + az_0) z + (ct_0 + dy_0) t = 0, \\ z_0 x + k\,dt_0 y + (x_0 + k\,az_0) z + (ct_0 + k\,dy_0) t = 0. \end{array}\right.$$

De là on conclut :

« Les points A et B sont les seuls points ayant même
» plan polaire par rapport aux deux surfaces, ce sont les
» plans tangents communs en A et B.

» Les plans polaires d'un point quelconque situé sur
» AB sont distincts, et ils passent tous par AB; ce sont
» des plans tangents.

» Les plans polaires d'un point quelconque situé sur
» AC sont distincts, et passent par BD, et inversement. »

35. Un plan quelconque passant par AB, coupe les deux surfaces suivant deux droites; AB étant une droite commune, il reste deux autres droites qui, par leur intersection, décrivent la courbe commune aux deux surfaces.

« La courbe d'intersection des deux surfaces se com-
» pose de la génératrice commune AB et d'une courbe
» rencontrée en trois points par un plan quelconque :
» cette courbe est la *cubique gauche*.

» La cubique gauche passe par A et B; AD et BC sont
» respectivement les tangentes en A et B. »

En effet, le cône (A) est coupé par le plan DAB, tangent commun en A aux deux surfaces, suivant les deux droites AB et AD : ce sont les tangentes au point double de la courbe d'intersection des deux surfaces; or la courbe d'intersection se compose de la cubique gauche et de la corde AB, et elle a effectivement, comme courbe composée, deux points doubles A et B.

Un plan quelconque passant par la génératrice commune ne rencontre la cubique gauche qu'en un seul point; la chose est évidente, puisque A et B sont déjà deux points de la cubique.

36. « Un plan quelconque passant par la droite AD » coupe les deux surfaces suivant des coniques oscula- » trices, le contact est du second ordre, la tangente » commune est AD; la même propriété a lieu pour la » droite BC. »

Si l'on considère, en effet, un plan quelconque passant par AD, savoir :

$$(15) \qquad y = \alpha z,$$

et si l'on remplace y par αz dans les équations (11), il vient

$$(16) \qquad \begin{cases} ct^2 + az^2 + 2d\alpha zt + 2xz = 0, \\ ct^2 + kaz^2 + 2dk\alpha zt + 2xz = 0; \end{cases}$$

ce sont des cônes de même sommet sur lesquels se trouvent les sections des surfaces (11) par le plan (15). Si l'on assimile ces équations à celles de deux coniques, on trouve, pour l'équation en μ,

$$\begin{vmatrix} 0 & \mu + 1 & 0 \\ \mu + 1 & a(\mu + k) & d\alpha(\mu + k) \\ 0 & d\alpha(\mu + k) & c(\mu + 1) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad (\mu + 1)^3 = 0;$$

cette équation a ses trois racines égales; d'ailleurs, les cordes communes correspondant à la racine -1 sont distinctes; par conséquent, les cônes (16) sont osculateurs, et le contact est du second ordre; donc, etc.

II. *Le cône* (A) *est un cône proprement dit ; le cône* (B) *se réduit à deux plans.*

37. D'après l'analyse du n° 31, on a, dans ce cas, les deux relations

$$(17)\quad A_{11}=0,\quad \begin{vmatrix} 0 & A_{13} & A_{14} \\ A_{31}(\lambda_1-\lambda_0) & B_{33}+\lambda_1 A_{33} & B_{34}+\lambda_1 A_{34} \\ A_{41}(\lambda_1-\lambda_0) & B_{43}+\lambda_1 A_{43} & B_{44}+\lambda_1 A_{44} \end{vmatrix}=0.$$

Le plan tangent en A aux deux surfaces (4), n° 31, est $f'_y=0$, ou

$$A_{13}z+A_{14}t=0;$$

ce plan est le même pour chacune des deux surfaces; prenons-le pour face ABD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposons $A_{14}=0$; les équations (4), n° 31, des deux surfaces deviennent alors

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &2A_{13}xz+A_{22}y^2+2A_{23}yz\\ &\quad+2A_{24}yt+A_{33}z^2+2A_{34}zt+A_{44}t^2=0,\\ &-2\lambda_0 A_{13}xz-\lambda_1(A_{22}y^2+2A_{23}yz+A_{24}yt)\\ &\qquad\qquad+B_{33}z^2+2B_{34}zt+B_{44}t^2=0; \end{aligned}\right.$$

et celles des cônes sont

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &[A]\quad (\lambda_0-\lambda_1)(A_{22}y^2+2A_{23}yz+2A_{24}yt)\\ &\qquad\qquad+(B_{33}+\lambda_0 A_{33})z^2+2(B_{34}+\lambda_0 A_{34})zt\\ &\qquad\qquad\qquad+(B_{44}+\lambda_0 A_{44})t^2=0,\\ &[B]\quad 2(\lambda_1-\lambda_0)A_{13}xz+(B_{33}+\lambda_1 A_{33})z^2\\ &\qquad\qquad+2(B_{34}+\lambda_1 A_{34})zt+(B_{44}+\lambda_1 A_{44})t^2=0. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas que nous étudions, le sommet du cône (A) est en A et déterminé; mais celui du cône (B) est indéterminé, et est un quelconque des points de l'intersection des deux plans qui constitue le système (B).

Le coefficient A_{14} étant nul, la seconde des relations (17) devient

$$A_{13}^2(B_{44}+\lambda_1 A_{44})=0,$$

mais A_{13} ne peut pas être nul, autrement les deux surfaces (18) seraient des cônes; on doit donc avoir

$$(1^\circ)\qquad B_{44}+\lambda_1 A_{44}=0;$$

les plans (B) ont alors pour équation

$$z\left[(B_{33}+\lambda_1 A_{33})z+2(B_{34}+\lambda_1 A_{34})t+2(\lambda_1-\lambda_0)A_{13}x\right]=0.$$

Leur droite d'intersection se trouve dans la face DAB déjà choisie; elle ne peut pas d'ailleurs passer par le point A, car il faudrait pour cela que A_{13} fût nul; nous pouvons donc la choisir pour arête BD du tétraèdre de référence, et prendre pour face DBC le deuxième des plans (B), ce qui revient à supposer

$$(2^\circ)\qquad B_{33}+\lambda_1 A_{33}=0,\quad B_{34}+\lambda_1 A_{34}=0.$$

D'après cela, les équations (18) des deux surfaces pourront s'écrire

$$(20)\qquad \begin{cases} 2A_{13}xz+A_{22}y^2+2A_{23}yz+2A_{24}yt \\ \qquad\qquad +A_{33}z^2+2A_{34}zt+A_{44}t^2=0, \\ 2B_{13}xz+A_{22}y^2+2A_{23}yz+2A_{24}yt \\ \qquad\qquad +A_{33}z^2+2A_{34}zt+A_{44}t^2=0; \end{cases}$$

celles des plans (B) et du cône (A) sont respectivement

$$(21)\qquad \begin{cases} [B] \qquad xz=0, \\ [A] \quad A_{22}y^2+A_{33}z^2+A_{44}t^2+2A_{23}yz \\ \qquad\qquad +2A_{24}yt+2A_{34}zt=0. \end{cases}$$

Jusqu'ici nous n'avons choisi, dans le tétraèdre de référence, que le sommet A, la face BAD, l'arête BD et le plan DBC; le sommet B lui-même n'est pas déterminé, c'est un point quelconque de l'arête BD.

Le plan ABD, ou $z = 0$, coupe les deux surfaces (20) suivant les deux droites communes

$$A_{22}y^2 + 2A_{24}yt + A_{44}t^2 = 0;$$

ces deux droites ne peuvent pas coïncider, autrement on aurait

$$A_{24}^2 = A_{22}A_{44},$$

et les surfaces (20) se réduiraient à des cônes ; nous prendrons donc ces deux droites pour arêtes AB et AD, puisqu'elles passent par le sommet A déjà choisi, c'est-à-dire que nous supposerons

$$(30) \qquad A_{22} = 0, \quad A_{44} = 0.$$

Les trois sommets A, B, D du tétraèdre se trouvent alors déterminés, ainsi que la face DBC. D'ailleurs le coefficient A_{24} ne saurait être nul, car les surfaces (20) se réduiraient à des plans ; les équations (20) de ces deux surfaces pourront donc s'écrire

$$(22) \qquad \begin{cases} yt + ayz + bzt + cz^2 + dxz = 0, \\ yt + ayz + bzt + cz^2 + d_1xz = 0; \end{cases}$$

l'équation du cône (A) est alors

$$(23) \qquad (A) \quad yt + ayz + bzt + cz^2 = 0.$$

Le cône (A) est coupé par le plan $z = 0$ suivant les deux droites distinctes AB et AD ; prenons pour face DAC le plan tangent à ce cône suivant AD, c'est-à-dire que, pour $y = 0$, on devra avoir deux droites coïncidentes, ce qui donne $b = 0$; puis prenons pour face BAC le plan tangent au cône (A) suivant AB, il en résultera $a = 0$.

Les équations des deux surfaces se ramènent donc à la forme définitive

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{ll} [S] & yt + cz^2 + dxz = 0, \\ [T] & yt + cz^2 + d_1 xz = 0, \\ \text{ou} & \\ & yt + z(cz + dx) = 0, \\ & yt + z(cz + d_1 x) = 0; \end{array}\right.$$

et l'équation du cône (A) est

$$(25)\qquad (A)\quad yt + cz^2 = 0.$$

38. Les deux surfaces (S) et (T) ont en commun deux droites, savoir :

$$z = 0,\quad y = 0,\quad \text{ou}\quad AD,$$
$$z = 0,\quad t = 0,\quad \text{ou}\quad AB;$$

ces deux droites se coupent au point de contact des deux surfaces, et sont situées dans le plan ABD, ou $z = 0$, du système (B).

Le second plan CBD du système (B) coupe les deux surfaces suivant la conique

$$yt + cz^2 = 0,$$

tangente aux deux droites CB et DC, la corde des contacts est la droite DB.

Ainsi : « Lorsque l'équation en λ a deux racines doubles, que l'un des cônes (A) est un cône proprement » dit, et que l'autre (B) est un système de deux plans, » les deux surfaces se coupent suivant deux courbes » planes, et se touchent en trois points sans être circonscrites l'une à l'autre. Le premier point de contact est » le sommet A du cône proprement dit ; le plan tangent » commun coupe les deux surfaces suivant les deux

» mêmes droites AB et AD : c'est la première courbe
» plane commune ; le plan tangent commun est un des
» plans du système (B).

» L'autre courbe plane commune est une conique pro-
» prement dite, située dans le second plan du système (B)
» et sur le cône (A) ; elle est tangente, en B et D où elle
» rencontre l'intersection des deux plans (B), aux droites
» intersections de son plan avec les plans tangents au
» cône (A) suivant les génératrices AB et AD de ce cône
» situées dans le plan tangent commun en A aux deux
» surfaces. Les plans ADC et ABC touchent les deux sur-
» faces en D et B. Ainsi les deux surfaces se touchent
» aux trois points A, B, D. »

La réciproque est vraie ; on la démontre en choisissant le même tétraèdre de référence que ci-dessus, et en écrivant que les deux surfaces satisfont aux conditions imposées.

39. Les plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0) par rapport aux deux surfaces (24), ont pour équations

$$(26)\qquad \begin{cases} dz_0 x + t_0 y + (dx_0 + 2cz_0) z + y_0 t = 0, \\ d_1 z_0 x + t_0 y + (d_1 x_0 + 2cz_0) z + y_0 t = 0. \end{cases}$$

On constate aisément les propriétés qui suivent :

« Tous les points de l'intersection BD des deux plans
» du système (B) ont même plan polaire par rapport aux
» deux surfaces, et ces plans passent par la droite AC,
» intersection des plans tangents au cône (A) suivant
» les droites AB et AD communes aux deux surfaces.

» Le sommet A a même plan polaire par rapport aux
» deux surfaces : ce plan polaire est le plan tangent com-
» mun. Ce sont les seuls points qui aient même plan po-
» laire par rapport aux deux surfaces. »

On verra encore que :

« Les pôles des plans passant par BD sont distincts par » rapport à chacune des surfaces, et se meuvent sur AC, » et inversement. »

III. *Les deux cônes* (A) *et* (B) *se réduisent à un système de deux plans.*

40. Je prendrai d'abord deux de ces plans pour faces ABC et ABD du tétraèdre de référence; les équations des deux surfaces sont de la forme

$$(27)\left\{\begin{aligned}&A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+A_{44}t^2+2A_{12}xy\\&\quad+2A_{13}xz+2A_{14}xt+2A_{23}yz+2A_{24}yt+2A_{34}zt=0,\\&A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+A_{44}t^2+2A_{12}xy\\&\quad+2A_{13}xz+2A_{14}xt+2A_{23}yz+2A_{24}yt+2B_{34}zt=0;\end{aligned}\right.$$

l'équation en λ possède alors une racine double, et l'équation du cône, correspondant à l'autre racine λ_1, est

$$(28)\left\{\begin{aligned}&A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+A_{44}t^2+2A_{12}xy+2A_{13}xz\\&\quad+2A_{14}xt+2A_{23}yz+2A_{24}yt+2\frac{B_{34}+\lambda_1A_{34}}{\lambda_1+1}zt=0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation doit représenter deux plans; or aucun de ces plans ne peut se confondre avec un des premiers; car si l'un des plans (28) coïncidait avec le plan ABD par exemple, on verrait, en prenant l'autre pour face ADC (ce qui serait alors permis), que les deux surfaces se réduisent à des plans. On peut donc choisir les plans représentés par l'équation (28) pour face CDA et CDB du tétraèdre de référence; l'équation (28) devant se réduire à $xy=0$, on aura

$$A_{11}=0,\quad A_{22}=0,\quad A_{33}=0,\quad A_{44}=0,\quad A_{13}=0,$$
$$A_{14}=0,\quad A_{23}=0,\quad A_{24}=0,\quad B_{34}+\lambda_1A_{34}=0.$$

Les équations des deux surfaces se ramènent alors à la forme définitive

$$(29)\qquad \begin{cases} (S) & xy + a\,zt = 0, \\ (T) & xy + a_1\,zt = 0. \end{cases}$$

Le tétraèdre de référence est maintenant parfaitement déterminé; on voit que les deux surfaces ont en commun les quatre droites

AD, DB, BC, CA.

« Ainsi : lorsque l'équation en λ a deux racines égales, » et que les cônes correspondants se réduisent à deux » systèmes de plans, les deux surfaces se coupent suivant » quatre droites, c'est-à-dire sont circonscrites au qua- » drilatère gauche formé par les intersections des sys- » tèmes de plans entre eux, abstraction faite des arêtes » de chaque système.

» Les deux surfaces se touchent aux quatre points A, » B, C, D; et les plans tangents communs en ces points » sont respectivement

CAD, CBD, ACB, ADB.

41. Les équations des plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0) sont

$$(30)\qquad \begin{cases} xy_0 + yx_0 + a\,(zt_0 + z_0\,t) = 0, \\ xy_0 + yx_0 + a_1\,(zt_0 + z_0\,t) = 0. \end{cases}$$

On constate alors que :

« Tous les points de l'arête AB, intersection des deux » premiers plans, ont même plan polaire par rapport » aux deux surfaces; ces plans passent par l'arête CD,

» intersection des deux autres plans. Tous les points de
» l'arête CD ont même plan polaire, et ces plans passent
» par l'arête AB.

» Tout plan passant par AB coupe les deux surfaces
» suivant des coniques doublement tangentes; il en est
» de même pour les plans passant par CD. »

(*La suite prochainement.*)