A. GENOCCHI

Sur la théorie élémentaire des produits infinis

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 121-133

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__121_1>

SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES PRODUITS INFINIS;

PAR M. A. GENOCCHI.

Il me semble que les théorèmes généraux sur la convergence des produits infinis peuvent être établis d'une manière tout à fait élémentaire et très-simple en suivant à peu près la marche tracée par M. Weierstrass (*), et en s'aidant de la *formule de Nicole* que j'ai citée dans une autre occasion (**). Voici comment on pourrait exposer cette théorie.

(*) Crelle, t. LI, p. 18-33.
(**) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1867.

1. On a l'identité, que j'appelle *formule de Nicole,*

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{a-b} &= \frac{1}{a+v_0} + \frac{b+v_0}{(a+v_0)(a+v_1)} \\
&+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)(a+v_2)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_{n-1})}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_n)} \\
&+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_n)}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_n)(a-b)};
\end{aligned}
\right.
$$

en multipliant par $b-a$, et portant le dernier terme dans le premier membre, on peut lui donner la forme

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{b-a}{a+v_0}\right)\left(1+\frac{b-a}{a+v_1}\right)\cdots\left(1+\frac{b-a}{a+v_n}\right) \\
&= 1 + \frac{b-a}{a+v_0} + \frac{(b+v_0)(b-a)}{(a+v_0)(a+v_1)} \\
&+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)(b-a)}{(a+v_0)(a+v_1)(a+v_2)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_{n-1})(b-a)}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_{n-1})(a+v_n)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ainsi le premier membre est un produit de $n+1$ facteurs qui se développe dans une somme de $n+1$ termes; lorsque cette somme convergera vers une limite déterminée et finie pour des valeurs de n indéfiniment croissantes, il en sera de même du produit, qui alors sera appelé *convergent*, et cette limite sera la *valeur du produit infini.* Si la somme n'a pas de limite, le produit n'en aura pas non plus; et, par suite, la formule (2) transforme le produit dans une série, de manière qu'il sera convergent, divergent ou indéterminé comme la série elle-même.

2. En faisant

$$\frac{b-a}{a+v_n}=u_n,$$

d'où

$$1+u_n=\frac{b+v_n}{a+v_n};$$

la formule (2) deviendra

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)\\&\quad=1+u_0+(1+u_0)u_1+(1+u_0)(1+u_1)u_2+\ldots\\&\quad\quad+(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1})u_n,\end{aligned}\right.$$

formule presque équivalente, due à Euler (*), qui ne diffère pas au fond de celle de Nicolé.

Si $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont des quantités positives, on peut tirer de la formule (3)

$$(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)>1+u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n;$$

donc si la série Σu_n est composée de termes tous positifs et divergente, le produit $\Pi(1+u_n)$ croît au delà de toute limite comme la somme $u_0+u_1+\ldots+u_n$.

3. En changeant le signe des quantités u_n, on aura

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&(1-u_0)(1-u_1)\ldots(1-u_n)\\&\quad=1-u_0-(1-u_0)u_1-(1-u_0)(1-u_1)u_2-\ldots\\&\quad\quad-(1-u_0)(1-u_1)\ldots(1-u_{n-1})u_n;\end{aligned}\right.$$

(*) *Novi Comment. Acad. Petropol.*, t. V, p. 76.

et si les quantités u_n sont positives et inférieures à l'unité, il s'ensuivra

$$(1-u_0)(1-u_1)\ldots(1-u_n) > 1-u_0-u_1-u_2-\ldots-u_n,$$

puisque les facteurs supprimés dans le second membre seront aussi moindres que l'unité. On peut en déduire que si la série Σu_n composée de termes positifs est convergente, le produit $\Pi(1-u_n)$ ne peut avoir pour limite zéro. Soit s, en effet, la somme de cette série : en supprimant, s'il faut, les premiers termes de la série et les facteurs correspondants du produit, on peut supposer $s<1$, et comme on aura

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n<s,$$

on conclura

$$\Pi(1-u_n)>1-s.$$

Donc le produit surpassera toujours une quantité positive déterminée. Il faut, évidemment, qu'aucune des quantités u_n ne soit égale à 1.

4. Dans le même cas, c'est-à-dire la série Σu_n étant composée de termes positifs et convergente, le produit $\Pi(1+u_n)$ ne pourra pas augmenter à l'infini; car son inverse $\Pi\left(\frac{1}{1+u_n}\right)=\Pi\left(1-\frac{u_n}{1+u_n}\right)$ ne peut avoir zéro pour limite, puisque la série $\Sigma\left(\frac{u_n}{1+u_n}\right)$, dont les termes sont positifs et plus petits que les termes correspondants de la série Σu_n, sera à plus forte raison convergente (n° 3).

Si, au contraire, la série Σu_n est divergente, ses termes étant positifs et inférieurs à l'unité, le produit $\Pi(1-u_n)$ aura pour limite zéro. En effet, son inverse

$\Pi\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = \Pi\left(1+\frac{u_n}{1-u_n}\right)$ augmente indéfiniment (n° 2), puisque la série $\Sigma\left(\frac{u_n}{1-u_n}\right)$, ayant ses termes positifs et plus grands que les termes correspondants de la série Σu_n, sera aussi divergente.

5. Si la série Σu_n est composée de termes positifs et convergente, chacun des produits $\Pi(1+u_n)$, $\Pi(1-u_n)$ sera aussi convergent, et sa valeur sera toujours différente de zéro pourvu qu'aucune des quantités u_n dans le second produit ne soit égale à l'unité.

La formule (2) fournit non-seulement la démonstration de ce théorème, mais développe en série convergente la valeur du produit. Soit, en effet,

$$w_n = \frac{b+v_0}{a+v_0}\cdot\frac{b+v_1}{a+v_1}\cdots\frac{b+v_{n-1}}{a+v_{n-1}}\cdot\frac{a-b}{a+v_n}.$$

Si les quantités a, b, v_n sont positives et $a > b$, on aura

$$0 < w_n < \frac{a-b}{a+v_n},$$

et la formule (2) donnera

$$\Pi\left(1-\frac{a-b}{a+v_n}\right) = 1 - \Sigma w_n.$$

Or : 1° en omettant, s'il faut, les premiers termes et facteurs, on pourra supposer $u_n < 1$, et alors on pourra faire $u_n = \frac{a-b}{a+v_n}$, ce qui donnera $w_n < u_n$; par conséquent, la série Σw_n sera convergente comme Σu_n et le produit $\Pi(1-u_n)$ aura la même limite que $1-\Sigma w_n$, limite différente de zéro (n° 3) ; 2° en prenant l'inverse du premier membre on aura

$$\Pi\left(1+\frac{a-b}{b+v_n}\right)=\frac{1}{1-\Sigma w_n},$$

et l'on pourra faire $u_n=\dfrac{a-b}{b+v_n}$: le produit $\Pi(1+u_n)$ ne pourra pas augmenter à l'infini (n° 4), et aura une limite déterminée en fonction de la somme de la série Σw_n, qui sera convergente, parce que, b étant $< a$, on aura $w_n < u_n$.

6. Au moyen de ces propositions on démontre aisément un théorème d'Abel. Si deux séries à termes positifs Σu_n, Σw_n sont liées par la relation

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=(1+u_n)\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

elles seront toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes. Car en posant

$$\frac{w_n}{u_n}=v_n,$$

il viendra

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=1+u_n;$$

d'où, en prenant successivement $n=0, 1, 2, \ldots,$ et multipliant, on tire

$$v_n=v_0(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1});$$

mais si la série Σu_n est convergente, le produit $\Pi(1+u_n)$ est aussi convergent, et, par suite, reste au-dessous d'une quantité k, et, si la série Σu_n est divergente, ce produit peut surpasser toute quantité finie; donc on aura, dans le premier cas, $v_n < kv_0$, $w_n < kv_0 u_n$, et dans le second $v_n > kv_0$, $w_n > kv_0 u_n$. Ainsi, dans le premier cas, la série

Σw_n sera convergente; dans le second, elle sera divergente comme la série Σu_n.

Ce théorème découle encore plus simplement de la formule (3). En effet, si la série Σu_n est convergente, le produit formant le premier membre est aussi convergent, et comme on peut représenter le second membre par $1 + \Sigma w_n$, les quantités w_n vérifiant la relation ci-dessus, il faut que la série Σw_n soit de même convergente. Si la série Σu_n est divergente, il est évident que la série Σw_n sera aussi divergente, puisque $\frac{w_{n+1}}{w_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

On satisfait à la relation qui lie les deux séries en supposant

$$u_n = \frac{w_n}{a + w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1}},$$

où nous désignons par a une constante quelconque; et l'on parvient ainsi à l'énoncé sous lequel Abel a fait connaître son théorème.

7. Si le terme général u_n est imaginaire, soit ρ_n son module, et supposons que la série $\Sigma \rho_n$ soit convergente : le produit $\Pi(1 + u_n)$ sera aussi convergent. Car, en vertu du théorème d'Abel, la série

$$1 + \rho_0 + (1 + \rho_0)\rho_1 + (1 + \rho_0)(1 + \rho_1)\rho_2 + \ldots$$

est convergente en même temps que la série $\Sigma \rho_n$; mais, ses termes n'étant pas inférieurs aux modules des termes de l'autre série

$$1 + u_0 + (1 + u_0) u_1 + (1 + u_0)(1 + u_1) u_2 + \ldots,$$

il faut que celle-ci soit aussi convergente : donc est convergent le produit $\Pi(1 + u_n)$, qui, d'après la formule (3), est égal à la somme des $n + 1$ premiers termes de cette série.

8. Soit

$$i = \sqrt{-1}, \quad T_n = (1 + it_0)(1 + it_1)\ldots(1 + it_n).$$

Si les quantités t_n sont réelles et positives, et que la série Σt_n soit divergente, mais la série $\Sigma (t_n)^2$ soit convergente, le produit T_n sera indéterminé pour n infini.

En effet :

1° En posant

$$T_n = P_n + iQ_n,$$

on aura

$$P_n^2 + Q_n^2 = (1 + t_0^2)(1 + t_1^2)\ldots(1 + t_n^2),$$

et ce produit convergera (n° 5) vers une limite finie et déterminée que nous nommerons λ^2. Donc P_n et Q_n n'augmentent pas indéfiniment.

2° Nous avons

$$P_n + iQ_n = (1 + it_n)(P_{n-1} + iQ_{n-1}),$$

d'où

$$P_n - P_{n-1} = -t_n Q_{n-1}, \quad Q_n - Q_{n-1} = t_n P_{n-1}.$$

Donc chacune de ces différences peut devenir aussi petite qu'on voudra, puisque, Q_{n-1} et P_{n-1} étant finis, le facteur t_n devient infiniment petit, sans quoi la série $\Sigma (t_n)^2$ ne serait pas convergente. En remplaçant n successivement par $n+1$, $n+2, \ldots, n+r$, et ajoutant, on trouve

$$P_{n+r} - P_{n-1} = -(t_n + t_{n+1} + \ldots + t_{n+r})\, Q',$$
$$Q_{n+r} - Q_{n-1} = (t_n + t_{n+1} + \ldots + t_{n+r})\, P',$$

où P' et Q' désignent deux moyennes : la première entre $P_{n-1}, P_n, P_{n+1}, \ldots, P_{n+r-1}$; la deuxième entre $Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1}, \ldots, Q_{n+r-1}$. Or les premiers membres sont toujours finis, mais la somme $t_n + t_{n+1} + \ldots + t_{n+r}$ augmente à l'infini avec r, car la série Σt_n est divergente; il faudra donc que les facteurs P' et Q' s'approchent indéfiniment de zéro.

3° Maintenant prenons n et r si grands, que d'une part la différence entre deux termes consécutifs de la suite P_{n-1}, P_n, $P_{n+1}, \ldots$, et de l'autre le facteur P' soient en valeur absolue au-dessous d'une quantité donnée ε aussi petite qu'on voudra. Si tous les termes de cette suite sont de même signe, un d'entre eux, au moins, sera moindre que P' et partant que ε; dans le cas contraire il y aura deux termes consécutifs de signes différents, et chacun d'eux sera moindre que leur différence et partant que ε. Les mêmes remarques s'appliquent à la suite Q_{n-1}, Q_n, $Q_{n+1}, \ldots$; ainsi P_n et Q_n peuvent s'approcher de zéro tant qu'on voudra pour des valeurs indéfiniment croissantes de n.

4° Mais comme $P_n^2 + Q_n^2$ a pour limite λ^2, il faudra que, pour Q_n très-voisin de zéro, P_n soit très-voisin de λ, et réciproquement. Donc ces quantités s'approchent aussi indéfiniment de λ.

Donc la quantité $T_n = P_n + iQ_n$, toujours finie, n'a pas de limite fixe (*).

9. En faisant $u_n = it_n$, on pourra développer le produit T_n par la formule (3). On obtiendra une série Σw_n dont le terme général sera

$$w_n = (1 + it_0)(1 + it_1)\ldots(1 + it_{n-1})\, it_n,$$

et qui sera indéterminée comme le produit. Mais dans ce terme général le produit $(1 + it_0)(1 + it_1)\ldots(1 + it_{n-1})$ reste toujours fini, son module ayant pour limite λ, tandis que le facteur it_n a pour limite zéro : on a donc une série

(*) Cette démonstration est due à M. Weierstrass.

indéterminée dont le terme général a pour limite zéro, lorsque son rang n croît à l'infini.

On a quelquefois admis comme évident qu'une série ne peut être indéterminée lorsque son terme général décroît indéfiniment. On voit que les démonstrations fondées sur ce *postulatum* ne sont pas exactes.

10. Soit

$$u_n = p_n + iq_n, \quad \frac{q_n}{1+p_n} = t_n, \quad \mathrm{T}_n \text{ comme ci-dessus;}$$

nous aurons

$$\Pi(1+u_n) = (1+p_0)(1+p_1)\ldots(1+p_n)\mathrm{T}_n.$$

Si les parties réelles p_n n'ont pas pour limite -1, et que la série Σq_n^2 soit convergente, la série Σt_n^2 sera aussi convergente, et le module du produit T_n aura une limite finie, car on pourra assigner un nombre positif $h < (1+p_n)^2$, et l'on aura $t_n^2 < \frac{q_n^2}{h}$. D'ailleurs en supposant la série Σp_n divergente et les quantités p_n de même signe, le produit $\Pi(1+p_n)$ augmente sans limite dans le cas de $p_n > 0$, et a pour limite zéro dans le cas de $p_n < 0$, $-p_n < 1$. Donc le produit $\Pi(1+p_n)$ convergera aussi dans le second cas vers la limite zéro, et dans le premier croîtra indéfiniment.

Dans le cas de $p_n < 0$, où la limite de $\Pi(1+u_n)$ est zéro, la série Σw_n, par laquelle ce produit est exprimé dans la formule (3), sera convergente, et l'on aura la relation

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}(1+u_n).$$

On trouve ainsi un théorème analogue à celui d'Abel (n° 6).

Si la série Σp_n est convergente, et reste convergente lorsqu'on réduit ses termes à leurs valeurs numériques, le produit $\Pi(1+p_n)$ est convergent (n° 7). Si d'un autre côté les quantités q_n sont de même signe, et que la série Σq_n soit divergente, la série Σq_n^2 convergente, le produit T_n sera indéterminé pour n infini (n° 9), car on pourra supposer $p_n^2 < 1$, et trouver deux nombres positifs h et k tels que

$$h < (1+p_n)^2, \quad k > 1+p_n,$$

d'où l'on conclura que les quantités t_n seront toutes de même signe, que la série Σt_n sera divergente, et la série Σt_n^2 convergente. Donc, dans les mêmes circonstances, le produit $\Pi(1+u_n)$ sera aussi indéterminé pour n infini.

Ces résultats comprennent, comme cas particuliers, plusieurs théorèmes de Gauss et de M. Weierstrass.

11. En posant

$$a = 2m+3, \quad b = 2m+2, \quad v_n = 2n,$$

et multipliant par $2m$, la formule (1) donne

$$2m = \frac{2m}{2m+3} + \frac{2m}{2m+3}\cdot\frac{2m+2}{2m+5} + \frac{2m}{2m+3}\cdot\frac{2m+2}{2m+5}\cdot\frac{2m+4}{2m+7} + \ldots,$$

équation obtenue par M. Sarrus dans le seul cas de m entier et positif à l'aide de calculs et de principes plus élevés (*). Il la regardait comme un « résultat remarquable qu'il serait peut-être difficile d'obtenir *à priori* et qui peut faciliter les réductions dans certains calculs »; et M. Gergonne demandait si la même formule aurait lieu pour m fractionnaire ou négatif. Or, d'après la for-

(*) *Annales de Mathématiques*, par Gergonne, t. X, p. 222.

mule (1) nous avons aussi le terme complémentaire $\frac{2m+2}{2m+3}\cdot\frac{2m+4}{2m+5}\cdots\frac{2m+2n+2}{2m+2n+3}$ égal au produit

$$\left(1-\frac{1}{2m+3}\right)\left(1-\frac{1}{2m+5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2m+2n+3}\right)$$

multiplé par $2m$; et comme la série $\Sigma\frac{1}{2m+2n+3}$ est divergente, ce produit aura zéro pour limite (n° 4), pourvu toutefois qu'aucun des dénominateurs $2m+3$, $2m+5,\ldots$ ne soit nul. Nous pouvons donc affirmer que la formule de M. Sarrus est vraie même pour des valeurs fractionnaires ou négatives de m, à l'exception seulement de celles qui donneraient $-m-\frac{1}{2}$ égal à un nombre entier et positif.

12. Faisant $a=1$, $b=1-m$, $\nu_n=n$, on tire de la même formule (1) l'égalité (*)

$$0=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots,$$

et le terme complémentaire du second membre est

$$\pm\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)(m-n-1)}{1.2\ldots n(n+1)},$$

ou

$$\pm\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right)\left(1-\frac{m}{n+1}\right);$$

la série $\Sigma\frac{m}{n}$ étant divergente, ce produit aura pour limite

(*) Posons $a=0$, $b=A$, $\nu_n=-\alpha_n$: la formule de Nicole donne aussi l'identité générale

$$0=1-\frac{A}{\alpha_0}+\frac{A(A-\alpha_0)}{\alpha_0\,\alpha_1}-\frac{A(A-\alpha_0)(A-\alpha_1)}{\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2}+\ldots$$

(Voir *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XVIII, p. 118, 219, 233.) J. B.

zéro tant que m sera positif (n° 4). Ainsi la formule du binôme $(1+x)^m$ est justifiée dans le cas de $x=-1$, si l'exposant m est >0.

La démonstration fondée sur le théorème de Taylor dans laquelle on emploie une expression du terme complémentaire ayant pour facteur la puissance $(1-\theta)^{m-1}$ et dépendant ainsi du nombre variable θ, n'est pas exacte pour $m<1$, puisque ce facteur augmenterait indéfiniment si le nombre θ s'approchait indéfiniment de l'unité.

13. Considérons enfin le produit

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots(n+1)},$$

en supposant m imaginaire. On peut le mettre sous la forme

$$\pm\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right);$$

puis, en posant $m=m'+im''$, comme la série $\Sigma\,\frac{m'+1}{n}$ est divergente et que la série $\Sigma\left(\frac{m''}{n}\right)^2$ est convergente, on verra (n° 10) que ce produit a pour limite zéro lorsque la valeur de $m'+1$ est positive.

Cette proposition permet de juger de l'exactitude de la formule du binôme dans le cas de $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$ si l'exposant m reçoit des valeurs imaginaires : cas particulier omis dans tous les Traités, mais dont s'est occupé Abel dans un célèbre Mémoire.

On démontrera de la même manière que la formule de M. Sarrus, rappelée au n° 11, continue d'être exacte lorsque m est imaginaire.