ABEL TRANSON

Lois de la courbure dans certaines transformations des courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 114-121
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__114_0>

LOIS DE LA COURBURE DANS CERTAINES TRANSFORMATIONS DES COURBES PLANES;

PAR M. ABEL TRANSON.

I. Une équation à deux variables étant interprétée selon les principes du calcul directif donne lieu à un spectacle géométrique d'une variété infinie. Car si l'on suppose que l'extrémité de la variable indépendante trace sur le plan une figure quelconque, les extrémités de chacune des valeurs correspondantes de l'autre variable décrivent des figures que, dans une autre occasion, j'ai appelées les *transformantes* de la première (*). Supposons, par exemple, que l'équation soit du degré m par rapport à cette autre variable, une figure tracée par l'extrémité de la variable indépendante aura m transformantes distinctes. De là le problème de chercher les relations de ces m transformantes, soit entre elles, soit avec la figure primitive. Et déjà on sait depuis longtemps que toute région infiniment petite autour d'un point de la figure transformée est représentée par une région semblable autour du point correspondant de chacune des transformantes, de même que la région infiniment petite autour d'un point quelconque de la sphère correspond à une région semblable autour du point correspondant de sa projection stéréographique. Mais je ne crois pas que jusqu'ici personne se soit appliqué à découvrir les lois relatives à la correspondance entre les éléments du second ordre, c'est-à-dire entre les rayons de courbure de la figure primitive et ceux de ses transformantes. Tel est l'objet de la présente Note.

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VII, p. 145.

II. Supposons donc que d'une équation donnée entre u et z, celle-ci variable indépendante, on ait tiré l'une des valeurs de u représentée par

$$u = f(z);$$

soient d'ailleurs x et y les coordonnées rectangulaires de l'extrémité de z, de sorte qu'on ait $z = x + iy$. Cette valeur étant substituée dans u donnera

$$f(x + iy) = \mathrm{X} + i\mathrm{Y};$$

X et Y, fonctions réelles de x et de y, seront les coordonnées rectangulaires de l'extrémité de u, et les deux équations

$$f'(x + iy) = \frac{d\mathrm{X}}{dx} + i\frac{d\mathrm{Y}}{dx},$$

$$if'(x + iy) = \frac{d\mathrm{X}}{dy} + i\frac{d\mathrm{Y}}{dy},$$

donneront les relations connues

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dx} = -\frac{d\mathrm{X}}{dy}, \quad \frac{d\mathrm{Y}}{dy} = \frac{d\mathrm{X}}{dx}, \quad \frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{X}}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{Y}}{dy^2} = 0,$$

lesquelles permettent d'exprimer toute relation où entrent les dérivées partielles de X et de Y au moyen des dérivées d'une seule de ces deux fonctions; de sorte qu'on a, par exemple, pour les différentielles totales du premier ordre,

$$(1) \qquad d\mathrm{X} = \frac{d\mathrm{X}}{dx}dx + \frac{d\mathrm{X}}{dy}dy,$$

$$(2) \qquad d\mathrm{Y} = -\frac{d\mathrm{X}}{dy}dx + \frac{d\mathrm{X}}{dx}dy.$$

III. Il est facile d'établir la similitude des régions infiniment voisines autour de deux points correspondants. Menons, en effet, par l'origine des variables directives une droite *ot* parallèle à la tangente de la transformée au point x, y, et une drote OT parallèle à la tangente de la transformante au point correspondant (X, Y); l'angle Tot, que nous appellerons ω, sera déterminé par la formule

$$\tang \omega = \frac{dx\,d\mathrm{Y} - dy\,d\mathrm{X}}{dx\,d\mathrm{X} + dy\,d\mathrm{Y}}.$$

Substituant les valeurs ci-dessus de dX et de dY, il vient après réduction

$$(3) \qquad \tang \omega = - \frac{\frac{d\mathrm{X}}{dy}}{\frac{d\mathrm{X}}{dx}}.$$

Cette valeur dépend de x et de y, c'est-à-dire de la situation du point transformé; mais elle ne dépend pas des directions particulières de ot et de OT, c'est-à-dire que les tangentes relatives à deux courbes correspondantes, et par conséquent aussi les deux normales, font entre elles un angle constant. En même temps, si l'on désigne par la lettre m le rapport des deux éléments correspondants dS et ds, on trouvera

$$m = \sqrt{\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{X}}{dy}\right)},$$

valeur qui dépend aussi de la situation du point (x, y), mais qui, elle aussi, est indépendante de la direction des éléments dS et ds. On voit que m est le *rapport de similitude* des deux régions correspondantes. Ces régions *semblables* ne sont pas *semblablement placées*. L'angle ω marque la différence de leur orientation. Il était d'ailleurs indispensable de donner ici la détermination de cet angle et celle du rapport de similitude, parce que ces deux grandeurs vont figurer dans la relation entre les éléments du second ordre.

IV. Le rayon de courbure de la transformante a pour expression

$$R = \frac{[(dX)^2 + (dY)^2]^{\frac{3}{2}}}{dX\, d^2Y - dY\, d^2X},$$

et on verra que sa valeur dépend à la fois de la direction des tangentes *ot* et OT (ou ce qui est la même chose des normales correspondantes), et aussi du rayon de courbure de la transformée au point (x, y). Toutefois, pour faciliter l'exposition des résultats, je supposerai d'abord que la transformée est rectiligne, de sorte que les différentielles premières dx et dy pourront avoir un rapport quelconque d'où résultera la direction de l'élément ds; mais les différentielles secondes d^2x et d^2y seront d'abord supposées nulles.

Dans cette supposition les différentielles secondes de X et de Y seront respectivement

$$(5) \qquad d^2X = \frac{d^2X}{dx^2}\, dx^2 + 2\, \frac{d^2X}{dx\, dy}\, dx\, dy - \frac{d^2X}{dx^2}\, dy^2,$$

$$(6) \qquad d^2Y = -\frac{d^2X}{dx\, dy}\, dx^2 + 2\, \frac{d^2X}{dx^2}\, dx\, dy + \frac{d^2X}{dx\, dy}\, dy^2,$$

de sorte qu'après substitution le dénominateur de R pourra être écrit comme il suit :

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2X}{dx^2}\, [(dy^2 - dx^2)\, dY + dx\, dy\, dX] \\ & \qquad + \frac{d^2X}{dx\, dy}\, [(dy^2 - dx^2)\, dX - 2\, dx\, dy\, dY]. \end{aligned} \right.$$

Pour interpréter cette expression, appelons β l'angle que la normale à la transformante fait avec la direction positive, et $\alpha = \beta - \omega$ l'angle que la normale à la transformée fait avec cette même direction, on aura les relations suivantes :

$$\frac{dX}{\pm \sin\beta} = \frac{dY}{\mp \cos\beta} = \sqrt{dX^2 + dY^2}.$$

$$\frac{dx}{\pm \sin(\beta - \omega)} = \frac{dy}{\mp \cos(\beta - \omega)} = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Enfin déterminons un nouvel angle ε par les conditions

$$\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{\cos\varepsilon} = \frac{\frac{d^2X}{dx\,dy}}{\sin\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2X}{dx\,dy}\right)^2};$$

alors on trouvera aisément que le rayon R s'exprime en fonction des angles β, ω, ε et du rapport de similitude précédemment déterminé ; on trouvera, dis-je,

$$R = \frac{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX}{dy}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2X}{dx\,dy}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\cos(\beta - 2\omega - \varepsilon)}.$$

Dans cette expression, β est la seule quantité qui varie avec la direction de la transformée rectiligne. Si R' est la valeur de R correspondante à $\beta = 2\omega + \varepsilon$; et si l'on appelle γ l'angle entre les directions de R et de R', on aura

$$R = \frac{R'}{\cos\gamma}.$$

Les extrémités de R sont donc situées sur une perpendiculaire élevée à l'extrémité de R' ; d'où résulte cette première proposition :

Théorème I. — *Toutes les droites passant par un même point du plan tranformé ont pour transformantes des courbes dont les centres de courbure relatifs au point correspondant sont sur une même droite.*

V. Supposons maintenant que la transformée soit une courbe quelconque dont le rayon de courbure au point (x,y) soit représenté par ρ.

Il faudra modifier les valeurs (5) et (6) de d^2X et de d^2Y en leur ajoutant respectivement

$$(5') \qquad \frac{dX}{dx}\, d^2x + \frac{dX}{dy}\, d^2y,$$

$$(6') \qquad -\frac{dX}{dy}\, d^2x + \frac{dX}{dx}\, d^2y.$$

Le dénominateur (7) de R s'augmentera alors d'une quantité qu'on pourra écrire sous la forme suivante :

$$(7') \qquad \frac{\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX}{dy}\right)^2\right](dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho}.$$

D'ailleurs, si l'on introduit comme précédemment dans la première partie (7) du dénominateur les angles β, ω, ε, et, par suite, l'angle γ et aussi la détermination de R', il viendra pour l'inverse de R la formule suivante :

$$(8) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos\gamma}{R'} + \frac{1}{m\rho}.$$

La première remarque à faire, c'est que dans le cas où u, c'est-à-dire $f(z)$, est une fonction linéaire de z, la valeur de R se réduit à $R = m\rho$, parce que R' est alors infini, comme contenant en dénominateur la racine carrée de $\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2X}{dx\,dy}\right)^2$. C'est qu'alors à une figure des z correspond une seule transformante qui lui est absolument semblable, parce que l'orientation ω et le rapport de similitude m sont les mêmes pour tous les points du plan transformé. Il est de force alors que le rayon de courbure de la transformante soit proportionnel à celui de la transformée.

Mais maintenant, u étant une fonction quelconque de z, supposons que par le point (x, y) passent plusieurs courbes ayant en ce point des directions différentes, mais le même rayon de courbure ρ. Dans la formule (8) l'angle γ et le rayon R seront les seules variables; et alors si, conservant l'origine des coordonnées transformantes, on dirige un nouvel axe des X dans la direction de R', et un nouvel axe des Y perpendiculairement à cette direction, il viendra, pour le lieu des centres de courbure des lignes transformantes, l'équation

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{m\rho}{R'}(R' - X).$$

C'est une conique ayant l'origine pour foyer, et la droite $R' - X = 0$ pour directrice, conique qui peut être l'une quelconque des trois courbes du second ordre selon la valeur de ρ. De là cette proposition générale :

Théorème II. — *Si plusieurs courbes passant en un point a de la figure primitive ont en ce point le même rayon de courbure ρ, les rayons de courbure correspondants de toutes leurs transformantes seront les rayons vecteurs d'une même conique ayant pour foyer le point* A, *transformant du point a. Cette conique variera d'espèce avec la valeur de ρ; mais sa directrice sera fixe, étant la droite à laquelle se réduit la conique elle-même lorsque ρ est infini.*

Nota.—Il y a des rapprochements curieux à faire entre la projection stéréographique des figures sphériques et la transformation des figures planes au moyen de l'équation entre deux variables directives. On sait déjà, comme nous l'avons rappelé au commencement de cette Note, que la région sphérique infiniment petite autour d'un point donné de la sphère est semblable à la région qui lui correspond en projection; mais de plus on a les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Tous les grands cercles qui passent par un même point de la sphère ont pour projections des cercles dont les centres sont en ligne droite.*

THÉORÈME II. — *Si plusieurs cercles de même rayon ρ passent par un même point de la sphère, les centres des cercles qui leur correspondent en projection stéréographique sont sur une même conique dont l'espèce dépend de la grandeur de ρ.*

La démonstration de ces deux théorèmes est facile. Je laisse au lecteur le soin de compléter le second en décidant si les coniques relatives à diverses valeurs ρ ont le même foyer et la même directrice.