Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 88-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__88_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 769 *et* 770

(voir 2e série, t. V, p. 383);

PAR M. LAISANT,
Capitaine du Génie.

769. *Nommons secteur en général le corps terminé d'une part par une surface conique, de l'autre par une surface quelconque, que nous appellerons la* base du

secteur. *Tous les secteurs ayant une base commune et des volumes égaux ont leurs sommets situés dans un même plan.* (ZEUTHEN.)

770. *Le plan dont il est parlé dans la question précédente est perpendiculaire à deux plans sur lesquels l'aire de la projection du périmètre de la base commune est nulle.* (Louis OPPERMANN, de Copenhague.)

Soient :

S le sommet du secteur;

σ la surface de la base;

O, x, y, z un système d'axes rectangulaires auquel je la suppose rapportée;

x, y, z les coordonnées du point S;

σ_x, σ_y, σ_z les projections de la surface σ sur les plans des yz, des xz et des yz.

Je prends sur la surface de base un point M, et j'imagine autour de ce point un élément plan de la surface.

Soit MT le plan tangent en M, et α, β, γ ses angles avec les axes. J'appelle $d\sigma$ l'élément pris autour de M, et $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ ses projections sur les trois plans coordonnés. On aura

$$\frac{d\sigma_x}{d\sigma} = \cos\alpha, \quad \frac{d\sigma_y}{d\sigma} = \cos\beta, \quad \frac{d\sigma_z}{d\sigma} = \cos\gamma.$$

Si je considère l'élément de volume du secteur dv, qui a pour sommet S et pour base $d\sigma$, j'aurai

$$dv = \frac{1}{3} d\sigma \times \text{SD},$$

car ce volume élémentaire peut être assimilé à un cône oblique, dont la hauteur est la distance SD du sommet au plan tangent MT.

Or, en appelant x, y, z les coordonnées du point M, on sait qu'on a

$$SD = (X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma$$
$$= (X - x)\frac{d\sigma_x}{d\sigma} + (Y - y)\frac{d\sigma_y}{d\sigma} + (Z - z)\frac{d\sigma_z}{d\sigma}.$$

Remplaçant

$$dv = \frac{1}{3}[(X - x)\,d\sigma_x + (Y - y)\,d\sigma_y + (Z - z)\,d\sigma_x],$$
$$3\,dv = X\,d\sigma_x + Y\,d\sigma_y + Z\,d\sigma_z - x\,d\sigma_x - y\,d\sigma_y - z\,d\sigma_x.$$

Remarquons que les valeurs $x d\sigma_x$, $y d\sigma_y$, $z d\sigma_z$ représentent les volumes élémentaires des cylindres projetant l'élément $d\sigma$ sur les trois plans coordonnés.

Si nous imaginons l'intégration faite dans les limites de la surface σ, les trois derniers termes donneront donc V_x, V_y, V_z, en appelant ainsi les volumes compris entre la surface σ, un des plans coordonnés, et le cylindre projetant correspondant.

Il viendra donc pour expression du triple du volume du secteur

$$3V = X\sigma_x + Y\sigma_y + Z\sigma_z - V_x - V_y - V_z.$$

En supposant V constant, le lieu du point S sera représenté par cette équation. On voit que ce sera un plan dont les angles avec les plans coordonnés auront des cosinus proportionnels à σ_x, σ_y, σ_z.

Si on change d'axes en prenant pour plan des xy un plan parallèle à celui que nous venons de trouver, l'équation devra prendre la forme $z =$ const., quelles que soient les directions dans le plan xy des axes des x et des y. On aura donc

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0.$$

D'où cette conclusion, plus générale que celle énoncée dans la question 770 :

La projection de la surface de base sur un plan *quelconque* perpendiculaire au plan des sommets est nulle.

Tous les plans ainsi obtenus en faisant varier le volume V du secteur sont parallèles entre eux, car σ_x, σ_y, σ_z sont constants.

Il y aurait lieu sans doute de rechercher des propriétés assez intéressantes de ces plans par rapport à la surface. On pourrait étudier en particulier le plan pour lequel les volumes V sont nuls. Pour l'instant, je me borne là, n'ayant voulu que résoudre les deux questions proposées.

(*) *Note.* — Ont résolu la même question MM. G.-B. Maffiotti, Pellet, Dennery.

Question 824

(voir 2e série, t. VI, p. 432);

PAR M. G.-B. MAFFIOTTI,
Etudiant à l'université de Turin.

Étant donnée l'équation générale d'une surface du second ordre

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &f(x,y,z,1)\\ &\quad = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx\\ &\qquad + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \end{aligned}\right.$$

rapportée à des axes rectangulaires, si l'on coupe cette surface par un plan

$$(2)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

α, β, γ étant les cosinus de l'axe du plan avec les axes de coordonnées, les valeurs algébriques R_1, R_2 *des* axes de la section, *seront données par les deux équations*

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{\dfrac{dH}{dD}}{H}[A\alpha^2 + A\beta^2 + A\gamma^2 + 2B\beta\gamma\\ &\qquad\qquad + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta - A - A' - A''],\\ &\frac{1}{R_1^2}\,\frac{1}{R_2^2} = -\frac{\left(\dfrac{dH}{dD}\right)^3}{H^2}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces équations H *désigne le déterminant*

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & \alpha \\ B'' & A' & B & C' & \beta \\ B' & B & A'' & C'' & \gamma \\ C & C' & C'' & D & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & o \end{vmatrix}.$$

(PAINVIN.)

Posons

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

et soient a, b, c les coordonnées du centre de la section, R la longueur d'un rayon vecteur, qui partant du centre aboutit à un point quelconque (x, y, z) du périmètre de la section, et l, m, n les cosinus directeurs de ce rayon. On a les équations

$$x = a + Rl,$$
$$y = b + Rm,$$
$$z = c + Rn,$$

$$(4)\quad f(a + Rl, b + Rm, c + Rn, 1) = o,\quad l^2 + m^2 + n^2 - 1 = o.$$

Développons l'avant-dernière; il vient

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & f(a, b, c, 1) + [lf'(a) + mf'(b) + nf'(c)]R \\ & \qquad + \varphi(l, m, n) R^2 = o. \end{aligned} \right.$$

Les racines de cette équation doivent être égales et de signes contraires; ce qui donne

$$(6)\qquad lf'(a) + mf'(b) + nf'(c) = o,$$

on a aussi

$$(7)\qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = o,$$

d'où, $2e$ étant un facteur indéterminé,

$$\left(\frac{1}{2}f'(a) + \alpha e\right) l + \left(\frac{1}{2}f'(b) + \beta e\right) m + \left(\frac{1}{2}f'(c) + \gamma e\right) n = o.$$

Cette équation doit être vérifiée par une infinité de valeurs de l, m, n; donc

$$(8)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2} f'(a) + \alpha e = 0, \\ \frac{1}{2} f'(b) + \beta e = 0, \\ \frac{1}{2} f'(c) + \gamma e = 0. \end{cases}$$

Ces relations et la suivante

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \delta = 0$$

déterminent complétement les coordonnées a, b, c du centre.

La recherche des axes, envisagée comme une question de maximum et de minimum, se fait en égalant à zéro la différentielle totale de R^2, ou bien, encore, de $\frac{1}{R^2}$ considéré comme fonction des variables l, m, n liées entre elles par les équations (4) et (7). On tire de (5), ayant égard à (6),

$$(9)\qquad \frac{f(a, b, c, 1)}{R^2} = -\varphi(l, m, n),$$

donc

$$\frac{1}{2}\varphi'(l)\,dl + \frac{1}{2}\varphi'(m)\,dm + \frac{1}{2}\varphi'(n)\,dn = 0,$$
$$l\,dl + m\,dm + n\,dn = 0,$$
$$\alpha\,dl + \beta\,dm + \gamma\,dn = 0.$$

La méthode des multiplicateurs donne, $-\lambda$, μ étant deux indéterminées,

$$(10)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi'(l) - \lambda l + \mu\alpha = 0, \\ \frac{1}{2}\varphi'(m) - \lambda m + \mu\beta = 0, \\ \frac{1}{2}\varphi'(n) - \lambda n + \mu\gamma = 0, \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&(A-\lambda)\,l + B''m + B'n + \alpha\mu = 0,\\
&B''l + (A'-\lambda)\,m + Bn + \beta\mu = 0,\\
&B'l + Bm + (A''-\lambda)\,n + \gamma\mu = 0,\\
&\alpha l + \beta m + \gamma n = 0,
\end{aligned}$$

dont on déduit par l'élimination de l, m, n, μ

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B'' & B' & \alpha \\ B'' & A'-\lambda & B & \beta \\ B' & B & A''-\lambda & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien, développant,

$$\lambda^2 - [\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - A - A' - A'']\,\lambda - \frac{dH}{dD} = 0,$$

H ayant la signification donnée par l'énoncé de la question.

Maintenant, ajoutons les équations (10) multipliées respectivement par l, m, n. En tenant compte de (4), (7), (9) et d'une propriété connue des fonctions homogènes, on aura

$$\lambda = -\frac{f(a, b, c, 1)}{R^2}.$$

Par suite, l'équation en λ se transforme dans la suivante

$$(11)\qquad \frac{f(a, b, c, 1)^2}{R^4} + \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - A - A' - A''}{R^2} f(a, b, c, 1) - \frac{dH}{dD} = 0.$$

C'est l'équation dont les racines sont les demi-axes de la section. Il ne reste plus qu'à exprimer $f(a, b, c, 1)$ au moyen de α, β, γ, δ et des coefficients de l'équation de la surface.

Pour cela on remarquera que

$$f(a, b, c, 1) = a\,\frac{1}{2}f'(a) + b\,\frac{1}{2}f'(b) + c\,\frac{1}{2}f'(c)$$
$$+ Ca + C'b + C'c + D.$$

Mais de (8) on tire

$$a\,\frac{1}{2}f'(a) + b\,\frac{1}{2}f'(b) + c\,\frac{1}{2}f'(c) = \delta e,$$

donc

$$f(a, b, c, 1) = Ca + C'b + C'c + D + \delta e.$$

Développons le système (8), ajoutons-y l'équation précédente, écrivons, pour l'homogénéité, $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{d}$ au lieu de a, b, c, e, et faisons disparaître le dénominateur d, il viendra

$$\begin{aligned}
&Aa + B''b + B'c + cd + \alpha e = 0,\\
&B''a + A'b + Bc + c'd + \beta e = 0,\\
&B'a + Bb + A''c + c''d + \gamma e = 0,\\
&Ca + C'b + C'c + [D - f(a, b, c, 1)]d + \delta e = 0,\\
&\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0.
\end{aligned}$$

Éliminons a, b, c, d, e, on aura

$$\begin{vmatrix}
A & B'' & B' & C & \alpha\\
B'' & A' & B & C' & \beta\\
B' & B & A'' & C'' & \gamma\\
C & C' & C'' & D - f(a, b, c, 1) & \delta\\
\alpha & \beta & \gamma & \delta & 0
\end{vmatrix} = 0,$$

d'où, évidemment,

$$H + f(a, b, c, 1)\frac{dH}{dD} = 0.$$

Par suite l'équation (11) devient

$$\frac{1}{R^4} - \frac{\frac{dH}{dD}}{H}\left[\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - A - A' - A''\right]\frac{1}{R^2} - \frac{\left(\frac{dH}{dD}\right)^2}{H^2} = 0,$$

et les équations (3) s'ensuivent immédiatement.

Note. — La question a été résolue aussi par MM. Koehler et Housel.