J. GRAINDORGE

Question de licence. Problème de mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 78-88

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__78_1>

QUESTION DE LICENCE — PROBLÈME DE MÉCANIQUE

(voir 2e série, t. VI, p. 44);

PAR M. J. GRAINDORGE,
Docteur ès Sciences, à Liége.

Trouver dans un plan vertical la courbe sur laquelle doit être assujetti à se mouvoir un point pesant partant d'un point donné, avec une vitesse initiale donnée en grandeur et en direction, pour que la pression du mobile sur cette courbe soit à la composante normale de son poids dans le rapport constant $\frac{k}{1}$.

k est positif ou négatif suivant que la pression et la composante normale du poids sont dirigées dans le même sens ou en sens contraire. On examinera particulièrement les cas suivants :

$$k = 0, \quad k = 1, \quad k = 2, \quad k = 3, \quad k = -1.$$

Solution. — Prenons pour origine la position initiale du point, et pour axe des x la direction de la vitesse initiale.

Si θ est l'angle que fait la tangente à la courbe au point m avec l'axe des y, la composante normale du poids g sera $g\sin\theta$, et la pression sera $N = gk\sin\theta$.

Les équations du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = N\cos\lambda,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + N\sin\lambda,$$

deviennent, en remarquant que $\cos\lambda = -\cos\theta$ et $\sin\lambda = \sin\theta$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -kg\sin\theta\cos\theta, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -g(1 - k\sin^2\theta). \end{aligned} \right.$$

Or, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \sin\theta\frac{ds}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \cos\theta\frac{ds}{dt},$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \sin\theta\frac{d^2s}{dt^2} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{ds}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \cos\theta\frac{d^2s}{dt^2} - \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{ds}{dt}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (1), il vient

$$\sin\theta \frac{d^2s}{dt^2} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{ds}{dt} = - kg \sin\theta\cos\theta,$$

$$\cos\theta \frac{d^2s}{dt^2} - \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{ds}{dt} = - g (1 - k \sin^2\theta),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2s}{dt^2} = - g\cos\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{ds}{dt} = g(1 - k)\sin\theta,$$

ou, en remarquant que $\frac{ds}{dt} = v$,

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = - g\cos\theta, \\ v\dfrac{d\theta}{dt} = g(1 - k)\sin\theta. \end{cases}$$

Ces deux dernières équations nous donnent par division

$$\frac{dv}{v} = - \frac{\cos\theta\, d\theta}{(1 - k)\sin\theta},$$

et en intégrant, et désignant par v_0 la vitesse initiale, c'est-à-dire la vitesse pour $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$lv = lv_0 - \frac{1}{(1 - k)} l\sin\theta,$$

d'où

$$(3) \qquad v = v_0 \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{1-k}}.$$

De la seconde des équations (2) on déduit

$$(4) \qquad dt = \frac{v\, d\theta}{(1 - k) g\sin\theta} = \frac{v_0\, d\theta}{(1 - k) g (\sin\theta)^{\frac{2-k}{1-k}}},$$

et, comme $ds = v\,dt$,

(5) $$ds = \frac{v_0^2}{(1-k)g}\,\frac{d\theta}{(\sin\theta)^{\frac{3-k}{1-k}}};$$

mais on a aussi

$$dx = ds\sin\theta \quad \text{et} \quad dy = ds\cos\theta,$$

d'où

(6) $$dx = \frac{v_0^2}{(1-k)g}\,\frac{d\theta}{(\sin\theta)^{\frac{2}{1-k}}},$$

qu'on ramène à une différentielle binôme en posant $\sin\theta = z$

(7) $$dx = \frac{v_0^2}{(1-k)g}\,z^{-\frac{2}{1-k}}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dz.$$

On a aussi

(8) $$dy = \frac{v_0^2}{(1-k)g}\,\frac{\cos\theta\,d\theta}{(\sin\theta)^{\frac{3-k}{1-k}}} = \frac{v_0^2}{(1-k)g}(\sin\theta)^{-\frac{3-k}{1-k}}\cos\theta\,d\theta,$$

d'où, en intégrant,

$$y = -\frac{v_0^2}{2g}(\sin\theta)^{-\frac{2}{1-k}} + \text{const.}$$

Or, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, et il vient

(9) $$y = \frac{v_0^2}{2g}\left[1 - (\sin\theta)^{-\frac{2}{1-k}}\right].$$

Pour obtenir l'équation différentielle de la courbe, nous prendrons la formule

$$\frac{dx}{dy} = \tan\!g\,\theta.$$

L'équation (9) nous donnera

$$\sin\theta = \left(\frac{v_0^2}{v_0^2 - 2gy}\right)^{\frac{1-k}{2}} = \frac{v_0^{1-k}}{(v_0^2 - 2gy)^{\frac{1-k}{2}}},$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{v_0^{2(1-k)}}{(v_0^2 - 2gy)^{1-k}}};$$

donc

$$(10) \qquad dx = \frac{v_0^{1-k}\,dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy)^{1-k} - v_0^{2(1-k)}}}$$

sera l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Cette expression sera intégrable lorsqu'on aura $\frac{1}{1-k} =$ entier ou bien $\frac{1}{1-k} - \frac{1}{2} =$ entier.

La première condition est satisfaite quand on suppose $k = 0$ et $k = 2$, la seconde pour $k = -1$ et $k = 3$.

Examinons maintenant ces cas particuliers.

1° *Soit* $k = 0$. Nous aurons pour la vitesse

$$v = \frac{v_0}{\sin\theta};$$

la longueur de l'arc de courbe sera donnée par la formule (5),

$$ds = \frac{v_0^2}{g}\frac{d\theta}{\sin^3\theta},$$

dont l'intégrale est

$$s = \frac{v_0^2}{2g}\left(l\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\theta - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right).$$

La formule (10) donne pour l'équation de la courbe

$$dx = \frac{v_0\,dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy) - v_0^2}} = \frac{v_0\,dy}{\sqrt{-2gy}},$$

et en intégrant, et remarquant que $x = 0$ pour $y = 0$, il vient

$$x^2 = -\frac{2v_0^2}{g} y,$$

équation d'une parabole dont l'axe est l'axe des abscisses.

2° *Soit* $k = 1$. — Ce cas ne peut pas se déduire des formules générales trouvées précédemment. Nous devons reprendre les formules primitives (2) et y faire $k = 1$; il viendra alors

$$\frac{dv}{dt} = -g\cos\theta,$$

$$v\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

La dernière nous apprend que $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ou $\theta = \text{const.}$

En intégrant la première, nons trouvons

$$v = v_0 - gt\cos\theta.$$

De $ds = vdt$, on déduit

$$ds = (v_0 - gt\cos\theta)\,dt,$$

d'où

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}\cos\theta.$$

Enfin,

$$\frac{dx}{dy} = \tang\theta,$$

d'où

$$x = y\tang\theta,$$

puisque $\theta = \text{const.}$

Donc, dans ce cas, la courbe devient une ligne droite, et le mouvement est uniformément varié.

3° *Soit* $k=2$. — La formule (3) donne, pour la vitesse au point m de la courbe,

$$v = v_0 \sin\theta.$$

La formule (4) donne

$$dt = -\frac{v_0\, d\theta}{g}, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{v_0}{g}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Nous aurons aussi

$$ds = -\frac{v_0^2}{g}\sin\theta\, d\theta, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{v_0^2}{g}\cos\theta.$$

Enfin, la formule (10) donne l'équation de la courbe

$$dx = \frac{v_0^{-1}\, dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy)^{-1} - v_0^{-2}}} = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gy}\, dy}{\sqrt{2gy}},$$

$$dx = \frac{(v_0^2 - 2gy)\, dy}{\sqrt{2gy\,(v_0^2 - 2gy)}}.$$

C'est l'équation différentielle de la cycloïde.

En posant

$$v_0^2 - 2gy = z,$$

il vient

$$dx = -\frac{z\, dz}{2g\sqrt{z\,(v_0^2 - z)}},$$

d'où, en intégrant,

$$x = \frac{1}{2g}\sqrt{2gy\,(v_0^2 - 2gy)} - \frac{v_0^2}{4g}\arccos\frac{4gy - v_0^2}{v_0^2}.$$

4° *Soit* $k=3$. — Nous aurons alors, à cause de la formule (3),

$$v = v_0\sqrt{\sin\theta};$$

à cause de la formule (5),

$$ds = -\frac{v_0^2}{2g}\, d\theta, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

La formule (10) donnera

$$dx = \frac{(v_0^2 - 2gy)\,dy}{\sqrt{v_0^4 - (v_0^2 - 2gy)^2}},$$

d'où, en intégrant, il vient

$$x = \frac{1}{2g}\sqrt{v_0^4 - (v_0^2 - 2gy)^2},$$

enfin

$$x^2 + \left(y - \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}.$$

Donc, dans ce cas, la courbe est un cercle de rayon $\frac{v_0^2}{2g}$.

5° *Soit* $k = -1$. — La vitesse est, dans ce cas,

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{\sin\theta}};$$

l'arc de la courbe sera donné par

$$ds = \frac{v_0^2}{2g}\,\frac{d\theta}{\sin^2\theta}, \quad \text{d'où} \quad s = -\frac{v_0^2}{2g}\cot\theta;$$

enfin, la formule (10) donne pour la courbe

$$dx = \frac{v_0^2\,dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy)^2 - v_0^4}}.$$

C'est l'équation différentielle de la chaînette.

En posant

$$v_0^2 - 2gy = z,$$

il vient

$$dx = -\frac{v_0^2}{2g}\,\frac{dz}{\sqrt{z^2 - v_0^4}},$$

et, en intégrant cette expression, il vient

$$z = \frac{v_0^2}{2}\left(e^{\frac{2gx}{v_0^2}} + e^{-\frac{2gx}{v_0^2}}\right);$$

donc l'équation de la courbe sera

$$v_0^2 - 2gy = \frac{v_0^2}{2}\left(e^{\frac{2gx}{v_0^2}} + e^{-\frac{2gx}{v_0^2}}\right).$$

Les deux cas $k = -2$ et $k = -3$ se ramènent simplement aux fonctions elliptiques de première espèce.

1° *Soit* $k = -2$. — La vitesse sera donnée par la formule (3),

$$v = \frac{v_0}{\sqrt[3]{\sin\theta}};$$

la longueur de l'arc de la courbe sera, formule (5),

$$ds = \frac{v_0^2\, d\theta}{3g\sin\theta\sqrt[3]{\sin^2\theta}};$$

l'ordonnée y d'un point quelconque en fonction de l'angle θ est

$$y = \frac{v_0^2}{2g}\left[1 - (\sin\theta)^{\frac{2}{3}}\right];$$

enfin, l'équation de la courbe est, en vertu de l'équation (10),

$$dx = \frac{v_0^3\, dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy)^3 - v_0^6}} = \frac{dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{2gy}{v_0^2}\right)^3 - 1}}.$$

Or, en posant dans cette dernière

$$\left(1 - \frac{2gy}{v_0^2}\right) = z,$$

il vient

$$dx = \frac{-v_0^2}{2g}\frac{dz}{\sqrt{z^3 - 1}} = \frac{-v_0^2}{2g}\frac{dz}{\sqrt{(z-1)(z^2+z+1)}}.$$

Si maintenant on fait comme Legendre (*Mémoires de* *l'Académie*, 1786),

$$2z + 1 + 2\sqrt{z^2 + z + 1} = q,$$

on trouve

$$dx = \frac{-v_0^2}{g} \frac{dq}{\sqrt{q}\sqrt{q^2 - 6q - 3}} = \frac{-v_0^2}{g} \frac{dq}{\sqrt{q}\sqrt{(q-\alpha)(q+\beta)}},$$

en désignant par α et $-\beta$ les racines de l'équation $q^2 - 6q - 3 = 0$,

$$\alpha = 2\sqrt{3} + 3 \quad \text{et} \quad \beta = 2\sqrt{3} - 3.$$

Si l'on fait dans cette dernière équation

$$q = \frac{\alpha}{\cos^2\varphi},$$

on trouve

$$dx = \frac{-v_0^2}{g\sqrt[4]{3}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}},$$

en posant

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

On voit donc que $k = -2$ donne une fonction elliptique de première espèce.

2° *Soit* $k = -3$. — Nous aurons successivement pour la vitesse x, la longueur de l'arc et l'ordonnée en fonction de θ,

$$v = \frac{v_0}{\sqrt[4]{\sin\theta}},$$

$$ds = \frac{v_0^2\, d\theta}{4g\sin\theta\sqrt{\sin\theta}},$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\right),$$

enfin, pour l'équation de la courbe,

$$dx = \frac{v_0^4\,dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy)^4 - v_0^8}} = \frac{dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{2gy}{v_0^2}\right)^4 - 1}}.$$

Or, en posant

$$1 - \frac{2gy}{v_0^2} = z,$$

il vient

$$dx = -\frac{v_0^2}{2g}\,\frac{dz}{\sqrt{z^4 - 1}} = -\frac{v_0^2}{2g}\,\frac{dz}{\sqrt{(z^2 + 1)(z^2 - 1)}}.$$

et si l'on fait

$$z = -\frac{1}{\cos\varphi},$$

on aura

$$dx = -\frac{v_0^2}{2g\sqrt{2}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

formule qui nous ramène encore aux fonctions elliptiques de première espèce.