HOÜEL

Quelques réflexions au sujet de la ligne de longueur minimum sur la sphère

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 73-78

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__73_0>

QUELQUES RÉFLEXIONS AU SUJET DE LA LIGNE DE LONGUEUR MINIMUM SUR LA SPHÈRE;

Par M. HOÜEL,
Professeur à la Faculté de Bordeaux.

« Question bien posée est à moitié résolue, » si l'on en croit le proverbe. On pourrait même dire ici, « est complétement resolue. » D'où peuvent venir, en effet, les nombreuses tentatives que l'on fait pour démontrer la propriété de minimum de longueur dont jouissent sur la sphère les arcs de grands cercles sinon de ce qu'aucun des auteurs n'a commencé par se demander ce que c'est que la *longueur* d'une courbe?

Ici on nous renverra, sans doute. à la notion « intime, indéfinissable, que chacun a de la longueur d'une ligne quelconque. » Or, pour tout géomètre qui a osé s'affranchir des préjugés de la routine, cette prétendue notion *à priori* n'a rien de précis ni de mathématique, et ce n'est, au fond, que l'énoncé tronqué d'un théorème élémentaire de calcul intégral.

Disons à ce propos que personne moins que nous ne méprise l'emploi des notions vulgaires et des représentations matérielles dans l'enseignement des mathématiques. Ces emprunts faits au sens commun sont éminemment propres à guider les jeunes intelligences vers le terrain du raisonnement exact. D'ordinaire ces notions résument grossièrement une synthèse très-compliquée de résultats expérimentaux; mais en même temps, elles nous sont plus familières que les idées simples que nous en dégagerons plus tard par la puissance de l'abstraction.

Mais une fois que par des assimilations avec les objets réels, on est parvenu à comprendre le but de la science pure, il faut, pour fonder celle-ci, reprendre à nouveau toutes les idées confuses de l'enseignement préparatoire, et par une analyse faite avec soin, séparer celles qui sont vraiment simples et irréductibles, pour y ramener ensuite celles qui sont plus complexes.

Telle est en particulier la voie qu'il faut suivre pour arriver à la notion exacte de la longueur d'une ligne courbe.

Après avoir indiqué ce que c'est qu'une ligne en général, on définit la ligne droite par sa propriété d'être complétement fixée par la position de deux de ses points, propriété dont l'existence nous est révélée par des expérience faites sur des *lignes matérielles*.

Une portion de ligne droite pouvant être appliquée sur une autre, on déduit de là les notions, 1° de l'égalité de deux droites, 2° de la décomposition d'une droite en parties, ou, ce qui revient au même, de l'addition ou de la soustraction de deux droites. De cette dernière notion on tire aisément celle de la multiplication d'une droite par un nombre quelconque, entier ou fractionnaire; puis, en appliquant le *principe des limites*, on arrive à ce que l'on nomme, par abréviation, la multiplication d'une droite par un *nombre incommensurable*.

En joignant à la notion de la ligne droite celle du plan et de l'angle, on établit, par des raisonnements fondés sur des superpositions immédiates, les propriétés élémentaires d'un triangle en commençant par le cas simple isocèle; puis on passe à la comparaison des triangles entre eux, et ensuite on étudie des figures plus compliquées.

Parmi les propriétés du triangle, qui se démontrent de la manière la plus simple, lorsqu'on suit la marche convenable, est celle qui fait l'objet de la vingtième proposition d'Euclide .

Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.

Ce qui veut dire que, si l'on porte sur une même droite, à la suite l'une de l'autre, deux droites égales à deux des côtés du triangle, le troisième côté sera égal à une partie seulement de la droite totale (*).

De ce théorème on déduit, comme corollaires, les théorèmes connus d'inégalités entre les droites et les lignes polygonales dans le plan ; on les étend ensuite facilement aux lignes polygonales dans l'espace. Il en résulte, entre autres conséquences, que *la ligne droite est le plus court des chemins* FORMÉS DE PARTIES RECTILIGNES *que l'on puisse tracer entre deux points donnés.*

Par une marche analogue, sauf quelques modifications au point de départ, on peut établir les mêmes propositions pour les figures composés d'arcs de grands cercles sur la sphère. Ainsi, *le plus court des chemins* COMPOSÉS D'ARCS DE GRANDS CERCLES *que l'on puisse tracer sur la sphère entre deux points donnés, est l'arc unique de grand cercle qui joint ces deux points.*

Cette analogie tient à ce que les arcs de grands cercles d'une même sphère jouissent comme la droite de la propriété d'être superposables à eux-mêmes dans toutes leurs parties, de sorte que l'on peut en définir l'égalité et l'addition de la même manière que pour la ligne droite. De là aussi résultent un grand nombre de propriétés communes aux triangles sphériques et aux triangles rectilignes.

Ici s'arrêtent les notions auxquelles on peut parvenir sans le secours du *calcul des limites* ou *calcul infinitésimal.* Si l'on prend une ligne courbe quelconque, elle ne

(*) C'est de cette manière qu'il faut *définir* les mots *plus grand* et *plus petit,* qui n'ont par eux-mêmes aucun sens en mathématiques. Le prétendu axiome : « Le tout est plus grand que la partie » n'est autre chose qu'une *définition* de l'inégalité.

sera pas, en général, superposable à elle-même dans toutes ses parties; ou, si elle l'est, comme le cercle ou l'hélice, elle ne sera pas superposable à une courbe analogue, mais de dimensions différentes.

Or, la superposition est le seul mode de comparaison directe des grandeurs géométriques. On ne peut comparer deux grandeurs qu'en les superposant l'une à l'autre, soit en entier, soit par parties. Si donc on peut définir rigoureusement l'égalité et l'addition de longueurs prises sur des droites quelconques, sur des cercles de même rayon, ou sur des hélices de même rayon et de même pas, il est impossible d'en faire autant pour les autres courbes, les mots *égal, plus grand* ou *plus petit* n'ayant plus ici absolument aucun sens.

Mais on reconnaît que, soit dans les applications aux objets matériels, soit dans les recherches théoriques, on peut toujours substituer à une courbe donnée un polygone qui, dans le premier cas, semble à nos yeux se confondre avec la courbe, et qui, dans le second cas, a ses points *infiniment rapprochés* de ceux de la courbe (*).

C'est toujours de ce polygone qu'il est question, toutes les fois que l'on voudra soumettre la courbe à des relations métriques quelconques. En particulier, c'est la longueur du périmètre de ce polygone, ou plutôt la *limite* de cette longueur, que l'on appellera, d'une manière abrégée, la *longueur de la courbe*.

On démontre dans tous les traités complets de calcul infinitésimal, et en particulier dans les ouvrages de M. Duha-

---

(*) Il est inutile d'avertir les personnes versées dans les mathematiques de ne pas confondre les quantités *très-petites*, c'est-à-dire qui sont sur le point d'échapper à nos sens et auxquelles on peut donner le nom de *microscopiques*, avec les quantités *infiniment petites*, qui sont de grandeur essentiellement variable, et que l'on *peut* faire approcher de zero autant que l'on voudra.

mel (*), que cette limite de longueur du polygone infiniment voisin de la courbe existe réellement, et quelle est finie et déterminée pour tout arc de courbe fini et déterminé. J'ai indiqué, dans une brochure publiée récemment (**), comment cette démonstration peut être présentée sous une forme élémentaire dans le cas d'une courbe plane, et il est aisé de modifier la démonstration de manière qu'elle s'applique à une courbe quelconque dans l'espace.

Le même mode de raisonnement peut également s'appliquer à l'existence d'un arc de grand cercle égal à la limite du périmètre d'un polygone sphérique infiniment voisin d'une courbe quelconque tracée sur la sphère, et c'est cet arc-limite que l'on appelle, pour abréger, *longueur de la courbe sphérique.*

De la démonstration même qui établit l'existence de cette limite, il résulte que cette limite jouit de toutes les propriétés des polygones qui convergent vers elle, indépendante du nombre et de la grandeur de leurs côtés.

En particulier, la longueur d'un arc de courbe, plane ou non plane, est plns grande que la corde de cet arc. La longueur d'une courbe sphérique quelconque est plus grande que celle de l'arc de grand cercle qui joint ses extrémités.

Il ne serait pas plus difficile de faire voir qu'entre deux points de la sphère, le plus court chemin ne peut être une courbe *extérieure* à la sphère.

Quelque élémentairement que l'on présente la démonstration de ces théorèmes, ce n'en sont pas moins, au fond, des théorèmes de calcul intégral. Si (à tort, selon

(*) *In quibus sunt quædam difficilia intellectu, quæ indocti et instabiles depravant, sicut et ceteras scripturas....* (II Petr., III, 16).

(**) *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*, p. 78 et suiv.

nous), on trouve ces considérations trop élevées pour les élèves intelligents de nos Lycées, que l'on supprime alors des programmes les questions qui rendent ces considérations indispensables, et qui sont loin d'être d'une absolue nécessité pour les commençants. Que l'on se contente, tout au plus de traiter le cas de la longueur du cercle, qui se trouve simplifié par la supposition que les polygones employés sont réguliers. Cela vaudrait beaucoup mieux que de donner aux jeunes gens des énoncés vides de sens et des démonstrations illusoires.

Nous n'ignorons pas, malheureusement, que les idées que nous venons de rappeler, et qui constituent la *seule* marche logique, trouveront, malgré leur extrême simplicité, bien des difficultés pour se faire jour à travers les brouillards de la tradition, et que longtemps encore on publiera des démonstrations du plus court chemin sur la sphère et du *postulatum* d'Euclide. Il existe bien encore des chercheurs de la quadrature du cercle et du mouvement perpétuel.