NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. BERTRAND

Étude des surfaces algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 5-16

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ÉTUDE DES SURFACES ALGÉBRIQUES.

RECHERCHES SUR LES SURFACES TÉTRAÉDRALES SYMÉTRIQUES, par M. *Jules de la Gournerie*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, professeur de Géométrie descriptive au Conservatoire des Arts et Métiers, avec des Notes par *Arthur Cayley*, membre de la Société Royale de Londres, correspondant de l'Institut de France, professeur à l'Université de Cambridge. Paris. Gauthier-Villars, 1867. — Prix : 6 francs.

The Cambridge and Dublin mathematical journal. — *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* — *Journal de Mathématiques pures et appliquées.* — *Nouvelles Annales de Mathématiques.* — *Divers Mémoires de MM. Cayley, Steiner, Kummer, Cremona, Mannheim, Moutard et Darboux.*

Les études mathématiques en France ont subi, il y a une quinzaine d'années, une crise fort grave en apparence, dont les amis de la science se préoccupèrent vivement. Le principe d'autorité, depuis plusieurs siècles exclu de nos écoles, y fit tout à coup une brusque et hautaine apparition, et le vieil adage : *Quand on sait le texte on sait la science,* sembla proposé aux maîtres aussi bien qu'aux élèves. De volumineux programmes, détaillant leçons par leçons les matières de l'enseignement, furent imposés, d'un bout de la France à l'autre, dans tous les établissements d'instruction publique, dont les élèves devaient tous, le même jour, à la même heure, étudier le même théorème, s'exercer aux mêmes calculs, ou dessiner la même épure. On décida ce que les élèves devaient savoir complétement, les idées qu'ils s'abstiendraient d'approfondir, et les difficultés devant lesquelles ils devaient s'incliner sans en demander l'explication à leurs maîtres.

Les sciences devaient être étudiées pour leur utilité pratique, et c'était une dangereuse erreur d'y voir surtout une gymnastique intellectuelle, et un moyen de fortifier l'esprit et d'en accroître la subtilité; les élégantes questions du concours général des lycées de Paris furent remplacées plusieurs fois par des calculs numériques, et les grands prix, auxquels on conservait le nom de *Prix d'honneur*, accordés à ceux qui obtenaient les chiffres les plus exacts.

Un tel régime, malgré l'incontestable capacité de ceux qui s'en firent les promoteurs, semblait devoir affaiblir rapidement en France l'esprit scientifique, en faisant disparaître, dès le début, l'habitude de l'effort individuel et le goût des recherches personnelles, et, si les théories transcendantes appartenant à une autre sphère pouvaient malgré tout se développer et s'accroître, on devait désespérer, pour longtemps, de l'étude plus humble en apparence, mais non moins utile ni moins vaste, des théories réputées élémentaires qui couronnent notre enseignement classique.

Les résultats ont trompé de la manière la plus heureuse ces fâcheuses prédictions, et nos écoles, affranchies graduellement, il est vrai, des entraves imposées, ont suivi sans infériorité les progrès incessants des Universités d'Angleterre et d'Allemagne. Des méthodes nouvelles, dont les plus importantes sont dues à nos illustres compatriotes, MM. Poncelet et Chasles, ont été de mieux en mieux appréciées à Paris, tout aussi bien qu'à Cambridge et à Berlin. Il était sans exemple, il y a vingt ans, qu'un ouvrage élémentaire étranger fût consulté par nos écoliers. J'ai sous les yeux, en écrivant ces lignes, la petite bibliothèque d'un candidat à l'École Polytechnique, et j'y aperçois : *Vorlesungen uber analytische Geometrie des Raumes, von Otto Hesse; Lessons of higher algebra, by S. Salmon; Geometrie of three dimensions, by Salmon*; à côté se trouve le *Traité des propriétés projectives des figures* de M. Poncelet et la *Géométrie supérieure* de M. Chasles, dont les couvertures fatiguées montrent assez que, pour se préparer à un concours difficile, on ne juge nullement nuisible de trop apprendre et de trop approfondir. Les examinateurs, par la force des choses, et quels que soient les règlements, sont conduits à préférer les candidats qui, plus curieux ou plus heureusement doués, au lieu de se préparer à traiter dans la langue mathématique un certain nombre de sujets désignés, s'efforcent d'apprendre la langue elle-même et de la parler couramment.

L'activité des inventeurs et l'attention des géomètres, presque exclusivement appliquées naguère aux méthodes infinitésimales, sont détournées aujourd'hui vers les théories qui, pour être réputées plus élémentaires, ne sont ni plus faciles à perfectionner ni moins intéressantes à approfondir. Pendant trop longtemps, par exemple, on a cru ou affecté de croire que la géométrie des lignes ou des surfaces algébriques, dépendant, depuis Descartes, de méthodes sûres et régulières, n'offrait plus qu'un exercice de patience utile aux seuls écoliers. J'ai dit ici même combien le plus ingénieux et le plus inventif peut-être des géomètres français contemporains avait dû montrer de persévérance et d'abnégation pour triompher, par l'excellence de ses travaux et la variété de ses recherches toujours originales, de l'indifférence systématique dans laquelle de très-illustres juges tenaient, avant tout examen, les questions difficiles et brillantes qui leur semblaient en dehors de la haute science.

Descartes lui-même avait peut-être contribué à répandre cette idée, que la méthode régulière et générale dont il est l'inventeur enlève, avec toute la difficulté, tout l'intérêt des études particulières sur les courbes et les surfaces. « J'espère, dit-il, avec un peu trop d'or-
» gueil en terminant sa Géométrie, que nos neveux me
» sauront gré, non-seulement des choses que j'ai ici ex-
» pliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontai-
» rement afin de leur laisser le plaisir de les inventer. »

La vérité est pourtant que, si l'instrument puissant créé par le génie de l'illustre philosophe permet de vérifier avec aisance, parfois même avec élégance, les théorèmes connus à l'avance, il n'est donné qu'aux esprits inventifs d'en déduire des résultats réellement nouveaux, dont la vérification ultérieure, quelque facile qu'elle puisse être, ne diminue en rien l'importance.

Les propriétés d'un certain nombre de surfaces algébriques étudiées depuis quelques années ont donné lieu à des travaux d'importance inégale, sur l'ensemble desquels il est juste d'appeler d'une manière particulière l'attention des amis de la Géométrie.

Citons en premier lieu de belles recherches sur la théorie générale des surfaces de troisième degré. Quelques détails sur les méthodes employées par Steiner et par M. Cayley montreront assez l'erreur profonde de ceux qui croiraient que, pour traiter des questions de ce genre, il suffit de calculer juste en appliquant des règles connues. Toute surface de second degré ayant un nombre infini de génératrices rectilignes, réelles ou imaginaires, il importe, pour la généralité des théorèmes comme pour l'exactitude des démonstrations, de ne pas faire la distinction. Peut-on de même placer des lignes droites sur les surfaces de troisième degré, et quel en est le nombre? La mise en équation du problème est des plus faciles, et conduit immédiatement à quatre équations entre quatre inconues. On en peut conclure que la question est déterminée, et comporte, en général, un nombre fini de solutions. Quel est ce nombre? L'application régulière des méthodes d'élimination le donnerait bien difficilement. Voici comment raisonne M. Cayley :

Si par une ligne droite située sur une surface de troisième ordre, on fait passer un plan quelconque, l'intersection de ce plan avec la surface se composera évidemment d'une droite et d'une conique, et il touche la surface aux deux points où ces lignes se rencontrent et qui sont des points doubles de l'intersection. Lorsque, par une position particulière du plan, la conique se réduit à deux droites, le plan coupe la surface suivant trois droites et la touche aux sommets du triangle dont elles sont les côtés; il est alors triplement tangent. On prouve aisément que par chaque ligne droite située sur la surface passent cinq de ces plans triplement tangents. Si l'on considère l'un d'eux en particulier, par chacune des trois droites qu'il contient, on peut en mener quatre autres. Ces douze nouveaux plans coupent la surface suivant vingt-quatre lignes droites nouvelles qui, réunies aux trois premières, forment un total de vingt-sept, et c'est ainsi que M. Cayley prouve l'existence de vingt-sept droites sur chaque surface de troisième degré. Il n'est pas moins facile d'établir qu'il n'en peut exister un plus grand nombre. Que l'on considère en effet l'un des plans triplement tangents qui contiennent trois droites formant leur complète intersection avec la surface; chaque ligne de la surface coupe ce plan en un point situé sur l'une des trois lignes et doit être, par conséquent, située dans un plan passant par l'une d'elles, qui, contenant deux droites de la surface, doit nécessairement en contenir trois, et est, par conséquent, un des douze plans dont nous avons parlé plus haut.

Toute surface du troisième ordre contient donc vingt-sept droites et n'en peut contenir davantage.

Il faut excepter toutefois les surfaces gauches du troisième ordre et les surfaces cylindriques et coniques, qui en contiennent en nombre infini.

Les surfaces gauches du troisième ordre ont été l'objet d'une étude fort intéressante faite par M. Cremona, dans laquelle plusieurs résultats très-nets et élégamment démontrés peuvent être cités à côté des belles recherches de M. Cayley, dont ils sont l'ingénieux complément.

M. Cremona démontre d'abord que les génératrices d'une surface réglée du troisième ordre rencontrent deux droites fixes.

Soient, en effet, dit-il, G, K, H, L, quatre génératrices; l'hyperboloïde qui passe par trois d'entre elles est coupé par la quatrième en deux points, et les génératrices D et E de l'autre système menées par ces points rencontrent les quatre droites G, K, H, L; elles ont donc chacune quatre points communs avec la surface, sur laquelle elles sont par conséquent entièrement situées.

Cela posé, considérons le plan EG, qui contient, outre la droite E, la génératrice G; la section complète de la surface par le plan, contenant deux droites et étant du troisième ordre, en contient nécessairement une troisième G', et ce plan, coupant la surface suivant les lignes E, G, G', coupe nécessairement toutes les génératrices en des points situés sur la droite E, qui, par conséquent, les rencontre toutes; par la même raison, elles s'appuient toutes sur la droite D, et la proposition se trouve démontrée.

Considérons de nouveau le plan EGG′; les droites G et G′, rencontrant E en des points distincts, doivent nécessairement rencontrer D en un même point, intersection de cette droite avec le plan EGG′. La directrice D étant rencontrée en ce point par deux génératrices, la surface admet deux plans tangents, et le point est *double*; il en est de même évidemment de tous les points de D, qui est une *droite double* située sur la surface.

Toute surface gauche du troisième ordre admet donc une droite double qui est l'une de ses deux directrices rectilignes.

M. Cremona démontre, en outre, les théorèmes suivants :

Toute surface du troisième ordre dans laquelle se trouve une droite double est une surface réglée, et toutes les sections coniques placées sur la surface s'appuient sur la droite double.

La surface engendrée par une droite qui s'appuie sur une conique et sur deux droites dont l'une rencontre la conique est une surface du troisième ordre dont la directrice rectiligne qui rencontre la conique est la droite double.

D'après une remarque de M. Cayley, les deux directrices rectilignes de la surface gauche du troisième ordre peuvent coïncider, et l'illustre géomètre donne dans ce cas la construction suivante de la surface.

Prenons une courbe cubique plane avec un point double; menons par ce point une droite quelconque et supposons que les plans A, B, C,... menés par cette droite correspondent harmoniquement aux points *a*, *b*.

$c, \ldots$, de la même droite. Si par un point m quelconque de la droite, on mène dans le plan correspondant M une droite qui rencontre la courbe cubique, le lieu de cette droite sera la surface gauche du troisième ordre dont les deux directrices rectilignes coïncident.

Les vingt-sept droites signalées, pour la première fois, par M. Cayley étaient depuis longtemps connues de Steiner, dont les recherches fort intéressantes ont été réunies postérieurement dans un article du *Journal de Crelle*.

Par les neuf droites suivant lesquelles se coupent deux à deux les faces de deux trièdres et par un point arbitrairement choisi, on peut faire passer une surface du troisième ordre et une seule. Chaque plan conduit par le point donné coupe le système des neuf droites en neuf points qui déterminent avec lui une courbe du troisième ordre; toutes ces courbes sont sur une même surface. Avec les neuf droites on peut former six groupes de trois qui ne se coupent pas deux à deux et déterminent un hyperboloïde à une nappe; chacun de ces six hyperboloïdes coupe la surface suivant trois nouvelles droites. Il est clair, en effet, que toute génératrice du second système menée par un point de l'intersection a quatre points communs avec la surface du troisième ordre, sur laquelle elle est par conséquent située tout entière. Ces six groupes de trois lignes réunies aux neuf premières forment en tout vingt-sept lignes droites situées sur la surface. Chacune de ces vingt-sept lignes est coupée par dix autres, qui se partagent en cinq groupes de deux droites situées dans un même plan, en sorte qu'elle forme cinq triangles avec les dix droites. Les vingt-sept droites se coupent en 135 points et forment en tout quarante-sept triangles.

Diverses surfaces du quatrième ordre ont été l'objet d'études fort intéressantes. Citons en premier lieu plusieurs recherches élégantes sur la surface annulaire nommée *tore*, engendrée par la révolution d'un cercle autour d'une droite située dans son plan. Un géomètre belge, M. Pagani, dans un Mémoire couronné par l'Académie de Bruxelles en 1826, avait étudié les sections planes de cette surface; mais les résultats les plus intéressants, qui semblent lui avoir échappé, ont été découverts postérieurement. Le plus curieux, sans contredit, dans cette étude maintenant complète, est dû à M. Yvon Villarceau :

Tout plan doublement tangent à la surface la coupe suivant deux cercles, de sorte que par chaque point du tore passent quatre circonférences différentes, qui y sont entièrement contenues; toute sphère doublement tangente contient également deux de ces cercles.

M. Darboux enfin, en étudiant les sections quelconques de la surface, a montré qu'elles sont les réciproques d'ovales de Descartes en leur assignant des propriétés focales qui les rapprochent des courbes du second degré.

Le tore est un cas particulier d'une surface étudiée d'abord par M. Charles Dupin et que l'on a nommée *cyclide*. Cette surface est l'enveloppe d'une sphère qui se meut en restant tangente à trois sphères fixes qui, pour une même cyclide, peuvent être choisies d'une infinité de manières. Cette surface est la seule dont toutes les lignes de courbure soient circulaires. M. Mannheim a établi élégamment ses propriétés essentielles en montrant qu'on peut la déduire du tore au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques.

Le tore et la cyclide se rattachent à une classe plus générale de surfaces de quatrième degré, découvertes et étudiées en même temps par MM. Moutard et Darboux, et dont la propriété la plus saillante est de fournir un des exemples les plus élégants et les plus simples du système orthogonal triple et un, comme celui des surfaces du second degré homofocales dont il est la généralisation.

Le tore et la cyclide ont pour ligne double le cercle imaginaire à l'infini; mais cette propriété ne leur appartient pas exclusivement : car elles ont, en outre, deux points singuliers, deux points doubles. C'est en adoptant la première propriété comme définition, que l'on est conduit de la manière la plus simple aux surfaces nouvelles, qui peuvent, en outre, comme l'a montré M. Moutard, être considérées comme les enveloppes d'une sphère qui se meut en restant orthogonale à une sphère fixe, et de manière que le centre décrive une surface du second degré. Dans le cas du tore et de la cyclide, cette surface du second degré se réduit à une section conique.

Tout plan doublement tangent à une telle surface la coupe suivant deux cercles. Ces plans, d'ailleurs, se répartissent en cinq séries, respectivement tangents à cinq lignes du second degré, en sorte qu'il passe par chaque point dix sections circulaires. Ces surfaces, à l'étude desquelles M. Darboux a mêlé, dans plusieurs beaux Mémoires, des recherches générales et élevées, sont appelées, selon toute apparence, à jouer un rôle des plus importants. Analogues aux surfaces orthogonales du second degré, auxquelles elles peuvent se reduire dans un cas particulier, décomposables comme elles en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure, on peut, comme elles aussi, les considérer comme homofocales, et il suffit pour cela, en suivant une analogie facilement indiquée, d'étendre un peu la définition.

M. Plucker a nommé *foyers d'une courbe plane* les points situés dans son plan d'où l'on peut mener à la courbe deux tangentes ayant pour coefficients angulaires $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$. Dans un de ces articles courts et élégants, qui, dans l'excellent recueil de M. Crelle, se détachent entre tant d'œuvres remarquables pour s'imprimer à jamais dans la mémoire des géomètres, M. Kummer a montré que des courbes orthogonales appartenant à un seul et même système ont nécessairement un certain nombre de foyers communs ; c'est cette remarque importante que M. Darboux a généralisée en donnant aux lignes focales d'une surface la définition suivante :

Que l'on mène les plans tangents (imaginaires bien entendu) qui sont parallèles à ceux du cône asymptote de la sphère, ils envelopperont une surface développable circonscrite à la proposée ; sur chacune des génératrices de cette surface, il y aura un point réel ; le lieu de ce point forme une ou plusieurs courbes qui seront nommées les *focales* de la surface développable, car par chacun d'eux passent deux génératrices imaginaires conjuguées. Si l'on nomme *foyer* un point quelconque de l'une des focales, on pourra définir le *foyer* comme une sphère de rayon nul ayant un double contact avec la surface ; deux surfaces homofocales sont, d'après les définitions précédentes, inscrites dans une même développable imaginaire. On sentira toute l'importance d'une telle considération, en songeant que c'est en se plaçant à ce point de vue que M. Chasles a élevé une théorie si élégante et si simple des surfaces homofocales du second degré.

Les surfaces du quatrième ordre qui nous occupent ont cinq focales placées sur cinq sphères orthogonales, deux à deux, et elles ne peuvent en avoir une sans avoir toutes les autres. Trois d'entre elles passent par un point quelconque de l'espace et s'y coupent à angle droit. Elles sont données d'ailleurs comme les surfaces du second degré, avec lesquelles leur analogie est si remarquable, par les valeurs différentes attribuées à un paramètre dans une même équation du quatrième degré.

Il existe sur le plan des courbes analogues que l'on peut définir comme ayant pour point double les deux points imaginaires à l'infini, communs aux cercles de plan. Ces courbes, qui jouissent de belles propriétés, comprennent en particulier les ovales de Descartes.

Les ovales de Descartes sont définies par deux foyers tels, que leurs distances aux points de la courbe, multipliées respectivement par des facteurs donnés, donnent une somme constante. Elles ont, comme M. Chasles l'a montré, un troisième foyer situé sur la ligne qui joint les deux premiers, et toutes les ovales ayant les trois mêmes foyers forment un système double orthogonal, c'est-à-dire que par chaque point du plan il passe deux ovales se coupant à angle droit, dont l'étude a conduit récemment M. Darboux à une démonstration nouvelle et fort élégante du célèbre théorème d'Euler, sur l'addition des fonctions elliptiques. J. Bertrand.

(Extrait du *Journal des Savants.*)

(*La suite prochainement.*)