Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 545-553

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__545_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 866

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 236);

Par M. LAISANT,
Capitaine du Génie.

Les différents points d'une courbe mobile engendrent une série de courbes dont l'enveloppe est la même que l'enveloppe de la courbe mobile. Exemple : l'enveloppe d'une droite de longueur constante, qui se meut entre deux droites rectangulaires, est la même que celle des ellipses engendrées par chacun des points de la droite mobile.

Le théorème général ne suppose pas que la courbe mobile ne se déforme pas pendant le mouvement.

(E. Barbier.)

Lorsqu'une courbe a se meut dans un plan de façon à dessiner une enveloppe b, il est évident que le mouvement peut être représenté par le roulement de la courbe a sur la courbe b, accompagné d'un certain glissement. Si l'on considère le mouvement élémentaire à partir d'une position quelconque des deux courbes, on voit par conséquent qu'il se décomposera en deux autres bien distincts :

1° Une rotation élémentaire autour d'un point infiniment voisin du point de contact, rotation dont l'amplitude α sera égale à la somme ou la différence des angles de contingence des courbes a et b, selon que ces courbes auront des courbures opposées ou non ;

2° Une translation élémentaire suivant la tangente commune. Le point de contact M, en vertu du premier mouvement, éprouvera, perpendiculairement à la tangente, un déplacement égal à α multiplié par un infiniment petit du premier ordre ; ce déplacement sera donc du deuxième ordre. En vertu du glissement élémentaire, le point M se déplacera au contraire suivant la tangente d'une quantité de premier ordre. Donc le premier déplacement disparaît devant le second, et l'élément de la trajectoire c décrite par le point M, considéré comme lié à la courbe a, se confond avec un élément de l'enveloppe b. Toutes les courbes telles que c sont donc tangentes à b, ce qui démontre le théorème en question.

On mettrait en évidence les raisonnements ci-dessus d'une façon plus frappante, mais non plus rigoureuse, en substituant aux courbes des polygones infinitésimaux dans lesquels les longueurs des côtés qui viennent s'appliquer l'un sur l'autre seraient différentes.

Rien ne suppose, du reste, dans ce qui précède, que l'angle de contingence de la courbe mobile est constant en un point donné. Pourvu que cet angle reste infiniment petit ainsi que celui de l'enveloppe, tout le raisonnement subsiste, de sorte que la courbe mobile peut se déformer pendant son mouvement, comme l'indique l'énoncé.

Ceci établi, nous ferons les remarques suivantes :

1° Si l'enveloppe est dessinée par un simple mouvement de glissement, ce sera toujours le même point M de la courbe mobile qui sera au contact. Les divers points de cette courbe décriront à un même instant des éléments parallèles à la tangente commune. Donc, en général, les trajectoires de ces points n'auront pas d'enveloppe, et, en tout cas, on ne peut rien conclure. Exemple : Un cercle se meut en glissant sur une ligne droite sans tourner; il dessine comme enveloppe le système de deux droites parallèles distinctes entre elles de la longueur du diamètre, et les divers points de la circonférence du cercle mobile tracent des droites parallèles aux deux premières, et n'ayant conséquemment pas d'enveloppe.

2° Si, au contraire, la courbe mobile roule sur son enveloppe sans glisser, le raisonnement ci-dessus doit être modifié, car le déplacement, qui était du premier ordre, devient identiquement nul ; celui du second ordre subsiste seul, et par suite au point considéré, la trajectoire et l'enveloppe se rencontrent à angle droit. Le théorème est donc en défaut jusqu'à un certain point dans ce cas-là; car, au point M, la trajectoire c présentera en général un rebroussement, de sorte qu'on peut dire que cette courbe *touchera* encore l'enveloppe b dans l'acception vulgaire du mot, mais non dans le sens géométrique. Exemple : Un cercle roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon double a pour enveloppe ce dernier; tous les points de la circonférence du cercle mobile décrivent alors des diamètres du cercle fixe qui viennent se terminer normalement sur la circonférence de celui-ci.

3° Si la courbe mobile roule en glissant sur certaines parties de son enveloppe et ne fait que rouler sur certaines autres, le théorème sera vrai sans restriction pour les premières, et devra subir l'application de la remarque précédente pour les autres. Exemple : Un cercle a roule sur une droite b; il décrit comme enveloppe le système de la droite b et d'une droite b' parallèle à b et à une distance égale au diamètre; et le cercle, dans ce mouvement, roule et glisse à la fois sur b. Tous les points de la circonférence décrivent des cycloïdes qui ont b' pour enveloppe, et s'appuient normalement sur la droite b en leurs points de rebroussement.

4° Le même théorème est applicable, avec des restrictions analogues aux précédentes, au cas d'une courbe à double courbure qui se meut dans l'espace de façon à rester constamment tangente à une même courbe fixe. Ici encore la courbe mobile peut se déformer pendant le mouvement, sans que le théorème cesse d'être vrai.

Note. — M. Pellet, de Nîmes, a résolu la même question.

Question 867

(voir 2e serie, t. VII, p. 236);

PAR M. P. WILLIÈRE.

A une hyperbole, on mène deux tangentes (A) *et* (B). *D'un autre point quelconque m de la courbe, on mène ensuite une parallèle à une asymptote, et l'on désigne par a, b, c les points de rencontre de cette parallèle avec les droites* (A), (B), (C). *Démontrer que mc est une moyenne proportionnelle entre ma et mb. Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, deux tangentes et un point.*

Solution. — Je désigne par A et B les points de contact des deux tangentes (A) et (B) avec l'hyperbole; la droite parallèle à une asymptote menée par le point m rencontre la courbe en un second point situé à l'infini, que je désigne par ∞. Le rapport anharmonique des quatre points A, m, B, ∞ est constant. En prenant successivement pour sommet du faisceau les points A et B, et en comptant les segments sur la parallèle à l'asymptote, j'aurai

$$\frac{am.c\infty}{cm.a\infty} = \frac{cm.b\infty}{bm.c\infty},$$

ou

$$\frac{am}{cm} = \frac{cm}{bm}.$$

De la proportion précédente, on déduit

$$\frac{ac}{bc} = \frac{am}{cm},$$

et en supposant que le point m s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire que la parallèle à l'asymptote devienne l'asymptote elle-même, le second rapport devient l'unité, et par suite

$$ac = bc.$$

De là résulte la seconde propriété que : *la distance comprise entre les points d'intersection de deux tangentes à l'hyperbole avec une asymptote est divisée en deux parties égales par la corde des contacts.*

Cette propriété et la précédente permettent de construire facilement une hyperbole connaissant deux tangentes, une asymptote et un point. Car en menant une parallèle à l'asymptote par le point donné, la première propriété fournit sur cette parallèle un point de la corde des contacts, et la seconde propriété en fournit un second sur l'asymptote; la corde des contacts étant connue, on pourra déterminer autant de points qu'on voudra de l'hyperbole.

Note. — M. L. Kiépert, étudiant de Mathématiques et de Physique à Berlin, a résolu la même question par le calcul en prenant l'équation de l'hyperbole sous la forme $xy = k^2$.

Nous avons aussi reçu des solutions analogues de MM. Brocard, sous-lieutenant de Génie à Metz; de Teyssière, élève de Sainte-Barbe; Julien Boulanger; Pellet, de Nîmes; C.L., maître répétiteur.

Nous ferons remarquer d'ailleurs que cette question a déjà été indiquée et résolue avec plusieurs autres par M. Page dans les *Nouvelles Annales*, 1re série, t. I, p. 65.

Question 873

(voir 2e série, t. VII, p. 237);

PAR M. L. T. D,
Élève du lycée de Lyon.

Si, par un point O, *on mène trois lignes respectivement parallèles aux côtés d'un triangle donné, les six points de rencontre de ces lignes avec les côtés sont sur une conique. Trouver son équation.* (S. ROBERTS.)

J'écarte le cas où le point O se trouverait sur l'un des côtés du triangle ou sur son prolongement. Alors les six points se réduiraient à cinq, dont trois en ligne droite; et aussi le cas où le point serait situé à l'un des sommets, car alors les six points se réduiraient à trois, les trois sommets eux-mêmes.

Cela posé, je placerai l'origine au point O, et je désignerai par

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

les équations des trois côtés du triangle. Chacune de ces équations peut être supposée de la forme

$$Px + Qy - 1 = 0.$$

Par conséquent les parallèles menées par O aux côtés auront pour équations respectivement

$$A + 1 = 0, \quad B + 1 = 0, \quad C + 1 = 0.$$

Je considère maintenant l'équation du second degré

$$BC + CA + AB + A + B + C + 1 = 0.$$

Il est facile de voir que la conique qu'elle représente passe par les six points considérés.

En effet, je cherche son intersection avec le côté $A = 0$; les points de rencontre se trouvent sur la courbe

$$0 = BC + B + C + 1 = (B + 1)(C + 1).$$

Ces points sont donc au nombre de deux, donnés par les systèmes d'équations

$$\begin{cases} A = 0, \\ B + 1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0, \\ C + 1 = 0. \end{cases}$$

En d'autres termes, la conique ci-dessus passe par les deux points de rencontre d'un côté du triangle avec les parallèles aux deux autres.

On démontrerait de même que cette conique passe par les quatre autres points indiqués dans l'énoncé.

Note. — Ont résolu la même question : MM. Lavigne, élève du lycée de Strasbourg; Lippmann, du lycée Napoléon; Pellet, du lycée de Nîmes; Georges de Villepin, du collége Stanislas; Griolet Henry, du lycée de Grenoble; A. Tournois, du lycée de Dijon; Willière, professeur à Arlon.

M. de Villepin s'appuie sur le théorème de Carnot relatif aux segments déterminés par les parallèles sur les côtés du triangle.

L'analyse de M. Griolet est fondée sur les propriétés des déterminants. Le problème est trop simple pour qu'on fasse usage d'une aussi puissante machine.

Question 887

(voir 2e série, t. VII, p. 240);

PAR M. ARNOYE,
Élève du lycée de Carpentras.

Étant donnés deux cercles qui se coupent orthogonalement, si l'on fait passer un cercle par leurs centres O *et* O′ *et par leur point d'intersection* I, *la somme des puissances d'un point de cercle par rapport aux cercles donnés est nulle.*

Soit M un point du cercle passant par les points O et O′ des cercles de rayons R, R′ et leur point I d'intersection. Nommons d et d' les distances MO, MO′. La somme des puissances du point M par rapport aux deux cercles est

$$d^2 - R^2 + d'^2 - R'^2;$$

mais les triangles rectangles OMO, OAO′ donnent

$$\overline{OO'}^2 = d^2 + d'^2 = R^2 + R'^2,$$

le théorème est donc démontré.

Note. — Ont résolu la même question à peu près de la même manière: MM. Honoré Pi; A. Jouffray, élève du lycée Louis-le-Grand; A. Tournon, du lycée de Dijon; Janin, du lycée de Grenoble; Jardé, du lycée Louis-le-Grand; Toubin, de Lons-le-Saulnier; Janin, de Sainte-Barbe; Piccioli; Conradt, étudiant à Berlin; C. L., maître répétiteur; Willière, professeur à Arlon.

Question 839.

Nota. — L'identité algébrique qui fait l'objet de la question 839, posée par M. J.-J.-A. Mathieu, est connue depuis très-longtemps; M. Chasles, dans la *Géométrie* *supérieure*, en donne une démonstration, et désigne cette relation par le nom de *formule d'Euler*. Cette identité est, ainsi que l'ont remarqué tous nos correspondants, une conséquence immédiate de la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples; il nous paraît donc inutile de reproduire une démonstration devenue *classique*; nous ajouterons même que les candidats à l'École Polytechnique doivent la considérer comme une *question d'examen*.

Ce qui est moins connu peut-être de nos lecteurs, c'est que l'on peut facilement remonter de l'identité dont il s'agit à la formule de décomposition d'une fraction rationnelle.

Soit en effet une fraction irréductible $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, dans laquelle $f(x)$ est au plus du degré m, et $\varphi(x)$ le produit de $m+1$ facteurs linéaires : $(x-a)(x-b)\ldots(x-l)$. Posons $\Psi(x)=(x-\lambda)\varphi(x)$, nous pourrons appliquer l'identité dont nous nous occupons à la fraction $\frac{f(x)}{\Psi(x)}$, et il viendra

$$\frac{f(a)}{(a-\lambda)\varphi'(a)}+\ldots+\frac{f(l)}{(l-\lambda)\varphi'(l)}+\frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}=0,$$

ou bien

$$\frac{\varphi(\lambda)}{f(\lambda)}=\frac{f(a)}{(\lambda-a)\varphi'(a)}+\ldots+\frac{f(l)}{(\lambda-l)\varphi'(l)}.$$

Note. — Ont résolu cette question : MM. Graindorge; Porte, du lycée de Grenoble; de Virieu, professeur à Lyon; J. Barbier, du lycée de Grenoble (classe de M. Bernard); Aldacotche, étudiant à Metz; Heming, du lycée de Metz (classe de M. Reboul); Alfred Girard; Marais, de Berny, Doucet, du lycée de Lyon; J. Welsch et G. Herment, du lycée de Metz.