NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 519-525

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__519_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 849

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 137),

PAR M. L. PAILLOTTE,
Étudiant à Montpellier.

On donne une ellipse, trouver : 1° le lieu des milieux des cordes normales ; 2° le lieu des pôles de ces normales ;

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

3° *la corde normale minimum ;* 4° *la corde normale qui détache le plus petit segment.*

(M. Collins, *The educational Times.*)

1° L'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, l'équation de la normale en fonction de son coefficient angulaire est

$$(1) \qquad y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + m^2 b^2}}.$$

L'équation du diamètre correspondant aux cordes de direction m est

$$(2) \qquad y = -\frac{1}{m}\frac{b^2}{a^2}x.$$

Le lieu est défini par ces deux équations, et si l'on élimine le paramètre variable m entre celles-ci, on aura l'équation du lieu.

Le résultat de l'élimination donne

$$(3) \qquad (a^6 y^2 + b^6 x^2)(a^2 y^2 + b^2 x^2)^2 = a^4 b^4 c^4 x^2 y^2.$$

Pour avoir aisément la forme du lieu représenté par cette équation (3), on transformera ses coordonnées rectilignes en coordonnées polaires, et l'on aura

$$\rho^2 = \frac{a^4 b^4 c^4 \sin^2\omega \cos^2\omega}{(a^2 \sin^2 \cos + b^2 \cos^2\omega)^2 (a^6 \sin^2\omega + b^6 \cos^2\omega)}.$$

Cette équation représente une rosace à quatre feuilles ; ce lieu est symétrique par rapport aux axes de coordonnées OX, OY, et est tangent à ces mêmes axes.

Il est facile de voir que cette courbe est intérieure à l'ellipse. En effet, si l'on cherche l'équation aux ordonnées des points d'intersection de la courbe représentée par l'équation (3) et de l'ellipse dont l'équation est

$$(4) \qquad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

l'équation (3) devient, en tenant compte de cette dernière équation (4),

$$a^6y^2 + b^6x^2 = c^4x^2y^2,$$

et l'équation aux ordonnées est

$$c^4y^4 + 2b^4c^2y^2 + b^8 = 0,$$

équation qui n'a que des racines imaginaires.

2° Soient (α, β) les coordonnées du pôle de la corde normale

$$(1) \qquad y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + m^2 b^2}},$$

la polaire de ce point par rapport à l'ellipse aura pour équation

$$(2) \qquad \frac{\alpha}{a^2}x + \frac{\beta}{b^2}y - 1 = 0.$$

Les équations (1) et (2), représentant la même droite, doivent être identiques, ce qui fournit les deux relations

$$(3) \qquad \frac{\sqrt{a^2 + m^2 b^2}}{a^2\beta} = -\frac{m\sqrt{a^2 + m^2 b^2}}{b^2\alpha} = \frac{c^2 m}{a^2 b^2}.$$

Éliminant le paramètre variable m entre ces deux dernières équations, on a l'équation du lieu.

Cette équation est

$$a^6y^2 + b^6x^2 = c^4x^2y^2,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho^2 = \frac{a^6\sin^2\omega + b^6\cos^2\omega}{c^4\sin^2\omega\cos^2\omega}.$$

Ce lieu est une courbe à centre et à quatre branches infinies dont les asymptotes sont représentées par les équations

$$x = \pm \frac{a^3}{c^2}, \quad y = \pm \frac{b^3}{c^2}.$$

On voit que ces asymptotes sont extérieures à l'ellipse, et on les construira facilement en s'aidant de la construction connue relative aux directrices de l'ellipse.

L'inclinaison du rayon vecteur minimum est

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{b}{a}},$$

et la longueur de ce rayon est

$$\frac{a^3 + b^3}{c^2}.$$

On voit que ce rayon, dans l'angle XoY, se trouve à gauche de la diagonale du rectangle formé par les quatre asymptotes, puisque le coefficient angulaire de cette diagonale est $\frac{b^3}{a^3}$, quantité inférieure à $\sqrt{\frac{b^3}{a^3}}$, dans le cas de l'ellipse.

Au point M où le rayon vecteur minimum rencontre la courbe, on pourra facilement construire la tangente, qui est perpendiculaire à ce rayon.

Remarque I. — La recherche du lieu précédent revient à la recherche de celui-ci : Trouver le lieu des points tels, qu'en menant de ces points des tangentes à l'ellipse, l'une d'elles soit perpendiculaire à la corde des contacts ; en d'autres termes, par chaque point de l'ellipse on mène une normale, et par les deux points d'intersection de cette normale avec l'ellipse on mène les tangentes : trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.

Remarque II. — Si l'on considère une ellipse concentrique à la première, et dont les axes soient respectivement $\left(2\frac{a^3}{c^2}\right)$, $\left(2\frac{b^3}{c^2}\right)$, et qu'on cherche le lieu du milieu de la portion de tangente à cette ellipse comprise entre les deux axes de coordonnées oX, oY, on trouve le même lieu.

3° Cherchons les équations aux abscisses et aux ordonnées des points d'intersection de la normale

$$(1)\qquad y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + m^2 b^2}}$$

avec l'ellipse

$$(2)\qquad a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Ces équations, une fois formées, on aura facilement la fonction

$$\delta^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2,$$

(x', y'), (x'', y'') étant les coordonnées des points communs à la normale et à l'ellipse. On trouve, toutes réductions faites,

$$\delta^2 = \frac{4a^4 b^4 (m^2 + 1)^3}{(a^2 + b^2 m^2)(a^2 m^2 + b^2)^2}.$$

Égalant à zéro le numérateur de la dérivée, on obtient une équation qui est vérifiée pour $m = 0$ et pour $m^2 = \frac{c^2 + a^2}{c^2 + b^2}$.

Le numérateur est toujours positif; pour que m soit réel, c'est-à-dire pour qu'il y ait un minimum correspondant à cette valeur, il faut qu'on ait $c > b$, et dans ce cas il y a un minimum correspondant à $m = \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{c^2 - b^2}}$.

Si $c < b$, la dérivée ne change de signe que pour $m = 0$, ce qui correspond au grand axe; elle s'annule encore pour $m = \infty$, ce qui donne le petit axe.

4° Je considère l'ellipse rapportée à un système de diamètres conjugués oX', oY', dont l'un des axes oY' est parallèle à la normale qui détache le plus petit segment.

Soient a', b', θ les éléments de ce système de diamètres conjugués ; en désignant par S le segment elliptique, nous aurons, d'après une formule connue,

$$(1) \qquad S = \frac{b'}{a'} \sin\theta\, s,$$

s étant le segment circulaire correspondant au segment elliptique S, dans le cercle de rayon a'.

En calculant s, on trouve

$$s = a'^2 \arcsin \frac{\sqrt{a'^2 - x^2}}{a'} - x\sqrt{a'^2 - x^2}.$$

La relation (1) peut donc s'écrire

$$(1') \qquad S = \frac{b'}{a'} \sin\theta \left(a'^2 \arcsin \frac{\sqrt{a'^2 - x^2}}{a'} - x\sqrt{a'^2 - x^2} \right).$$

Exprimons qu'au point (x, y), la normale à l'ellipse

$$a'^2 y'^2 + b'^2 x^2 - a'^2 b'^2 = 0$$

est parallèle à oY', nous aurons la condition

$$(2) \qquad x^2 = \frac{a'^4 \cos^2\theta}{b'^2 + a'^2 \cos^2\theta}.$$

Les théorèmes d'Apollonius donnent les deux autres relations

$$(3) \qquad d^2 = a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$

$$(4) \qquad ab = a' b' \sin\theta.$$

Calculant les valeurs de x, a', $\sin\theta$ à l'aide des équations (2), (3), (4), et portant ces valeurs dans (1'), on a

$$S = ab \left[\arcsin \frac{b'^2}{\sqrt{d^2 b'^2 - a^2 b^2}} - \frac{b'^2 \sqrt{(d^2 - b'^2) b'^2 - a^2 b^2}}{d^2 b'^2 - a^2 b^2} \right].$$

Prenant la dérivée de S par rapport à b' et égalant à zéro le numérateur de cette dérivée, on trouvera

$$\delta'^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Par suite, on a

$$S = ab\left[\arcsin\left(\frac{2ab}{d^2} - \frac{2abc^2}{d^4}\right)\right].$$

On calculera $\tang\theta$, et à l'aide de la formule

$$\tang\theta = \frac{a^2}{c^2}\left(m + \frac{b^2}{a^2m}\right)$$

que donne l'angle de deux diamètres conjugués, il sera facile d'avoir la direction de la normale correspondante.

Remarque. — Cette méthode aurait pu être employée pour la recherche de la plus petite normale inscrite dans l'ellipse. On aurait eu immédiatement δ; car dans ce cas $\delta = 2y$, y étant l'ordonnée du point où la normale à l'ellipse est parallèle à oY'. Des calculs semblables à ceux que nous avons effectués plus haut donneraient

$$\delta^2 = 4\frac{b'^6}{d^2b'^2 - a^2b^2},$$

et pour la longueur de la normale minimum

$$\delta^2 = 27\frac{a^4b^4}{d^6}.$$

Note. — M. Kaher Bey a résolu la même question en employant l'angle excentrique.