NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P.-A.-G. COLOMBIER

# Mémoire sur les symptômes d'imaginarité des racines des équations algébriques

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 7 (1868), p. 501-517

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__501_1>

# MÉMOIRE SUR LES SYMPTOMES D'IMAGINARITÉ DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

(voir 2e série, t. VII, p. 308);

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Licencié ès Sciences, Professeur à Paris.

---

DEUXIÈME PARTIE.

THÉORÈME V. — *Étant donnée une équation algébrique d'un degré quelconque complète, ou rendue telle,*

$$A_0 x^m + A_1 X^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

*si toutes les racines sont réelles, on a entre trois termes consécutifs*

$$A_p\, x^{m-p},\quad A_{p+1}\, x^{m-p-1},\quad A_{p+2}\, x^{m-p-2},$$

*la relation suivante due à Euler*

$$A_{p+1}^2 = \text{ou} > \frac{(m-p)(p+2)}{(m-p-1)(p+1)} A_p\, A_{p+2}.$$

*Démonstration.* — *Voyez* les *Nouvelles Annales*, 1<sup>re</sup> série, t. II, p. 256.

*Corollaire I.* — Si une équation algébrique complète, ou rendue telle, donne entre les coefficients de trois termes consécutifs, les exposants et les indices, la relation

$$A_{p+1}^2 < \frac{(m-p)(p+2)}{(m-p-1)(p+1)} A_p\, A_{p+2},$$

cette équation a nécessairement des racines imaginaires.

*Corollaire II.* — Si une équation algébrique complète, ou rendue telle, a toutes ses racines réelles, on a

$$A_{p+1}^2 > \frac{m-p}{m-p-1} A_p\, A_{p+2},$$

$$A_{p+1}^2 > \frac{p+2}{p+1} A_p\, A_{p+2},$$

$$A_{p+1}^2 > A_p\, A_{p+2}.$$

*Corollaire III.* — Si une équation algébrique complète, ou rendue telle, donne

$$A_{p+1}^2 = \text{ou} < \frac{m-p}{m-p-1} A_p\, A_{p+2},$$

$$A_{p+1}^2 = \text{ou} < \frac{p+2}{p+1} A_p\, A_{p+2},$$

$$A_{p+1}^2 = \text{ou} < A_p\, A_{p+2},$$

cette équation a nécessairement des racines imaginaires.

*Corollaire IV.* — Toutes les valeurs de la variable $p$ forment la progression arithmétique

$$\div 0.1.2.3\ldots(m-2):$$

si, dans le corollaire précédent, on fait $p = m - 2$ dans la première formule, et $p = 0$ dans la deuxième, on trouve respectivement

$$A_{m-1}^2 = \text{ ou } < 2A_{m-2}A_m,$$
$$A_1^2 = \text{ ou } < 2A_0A_2.$$

*Observations.* — M. Ossian Bonnet est arrivé à cette dernière formule par une autre voie (*voir* les *Nouvelles Annales*, 1re série, t. IV, p. 236). On peut encore arriver à ces deux formules, en remarquant que, si une équation a toutes ses racines réelles, l'équation aux carrés des racines doit être complète et ne doit avoir que des variations de signes. Enfin, l'une quelconque de ces deux formules se déduit de l'autre, par la considération de la transformée en $\frac{1}{x}$ de l'équation donnée. La dernière relation du Corollaire II est connue sons le nom de *Théorème de De Gua.* On la trouve dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, année 1741. Elle peut être démontrée très-simplement. On considère le produit du premier membre de l'équation donnée par $x - h\ldots.$

*Corollaire V.* — Pour abréger, posons

$$\mu = \frac{(m-p)(p+2)}{(m-p-1)(p+1)}.$$

Il est aisé de voir qu'on peut transformer cette expression de la manière suivante :

$$\mu = 1 + \frac{m+1}{(m-p-1)(p+1)};$$

la somme des facteurs du dénominateur est constante et égale à $m$, par conséquent la valeur maximum de ce dénominateur est égale à $\left(\frac{m}{2}\right)^2$ ; donc

$$\mu = \text{ ou } > \left(\frac{m+2}{m}\right)^2;$$

donc si une équation algébrique complète, ou rendue telle, a toutes ses racines réelles, le trinôme formé par trois termes consécutifs donne

$$A_{p+1}^2 = \text{ ou } > \left(\frac{m+2}{m}\right)^2 A_p A_{p+2};$$

par conséquent, si trois termes consécutifs d'une équation algébrique donnent

$$A_{p+1}^2 < \left(\frac{m+2}{m}\right)^2 A_p A_{p+2},$$

cette équation a nécessairement des racines imaginaires.

Théorème VI. — *Si les coefficients* P, Q, R *de trois termes consécutifs d'une équation algébrique complète, ou rendue telle, présentent deux permanences ou deux variations; si, de plus, les valeurs absolues, respectives $p$, $q$, $r$ de ces coefficients forment une proposition harmonique, dans l'ordre où ils sont écrits ou dans l'ordre contraire, l'équation considérée a nécessairement des racines imaginaires.*

*Première démonstration.* — Sans diminuer le degré de généralité de la question, on peut supposer que $p$, $q$, $r$ forment une proportion harmoniqne dans l'ordre où ces nombres sont écrits; car, s'ils formaient une proportion harmonique dans l'ordre inverse, on considérerait la transformée en $\frac{1}{x}$ de l'équation donnée. Cela posé, on a, par définition,

$$\frac{p-q}{q-r}=\frac{p}{r},$$

d'où

$$q^2-pr=-pr\left(\frac{p-r}{p+r}\right)^2;$$

mais, par hypothèse, P et R sont de même signe; donc

$$Q^2-PR=-PR\left(\frac{P-R}{P+R}\right)^2,$$

d'où

$$Q^2-PR<0.$$

Si l'on suppose que $r$ s'approche indéfiniment de $p$, jusqu'à en différer de moins toute quantité donnée, on aura

$$p=q=r,$$

et par suite

$$Q^2-PR=0;$$

donc si les valeurs absolues de P, Q, R sont égales ou inégales, et si elles forment une proportion harmonique, on a

(1) $$Q^2-PR=\text{ ou }<0.$$

Cela posé, si toutes les racines de l'équation considérée étaient réelles, le théorème de De Gua donnerait

(2) $$Q^2-PR>0;$$

comme les relations (1) et (2) sont incompatibles, il s'ensuit que l'équation donnée a nécessairement des racines imaginaires.

*Deuxième démonstration.* — Soit $m$ la moyenne géométrique entre $p$ et $r$. On a

$$m^2 - pr = 0.$$

Or, $q$ étant la moyenne harmonique entre $p$ et $r$, on peut démontrer aisément, soit par la géométrie, soit par le calcul, que l'on a

$$q = \text{ou} < m;$$

dès lors

$$q^2 - pr = \text{ou} < 0,$$

et par suite

$$Q^2 - PR = \text{ou} < 0,$$

ce qui n'est autre chose que la relation (1). Arrivé à ce point, on continue comme dans la première démonstration.

*Observation.* — Si les valeurs absolues des trois coefficients P, Q, R sont en proportion harmonique, et si le nombre des variations que présentent ces coefficients est égal à l'unité, l'équation considérée n'a pas nécessairement des racines imaginaires.

Théorème VII. — *Si les valeurs absolues des coefficients* P, Q, R *de trois termes consécutifs d'une équation algébrique forment une proportion contre-harmonique dans l'ordre où ils sont écrits ou dans l'ordre inverse; si, en outre,* P *et* R *sont de même signe, je dis que l'équation n'a pas nécessairement des racines imaginaires.*

*Démonstration.* — En raisonnant comme dans la première partie de la démonstration du théorème précédent, on trouve que

$$Q^2 = \left(\frac{P^2 + R^2}{P + R}\right)^2;$$

posant

$$P = Ry,$$

il vient

$$Q^2 - \mu PR = \left(\frac{R}{y+1}\right)^2 \left[y^3 \cdot \overline{y - \mu} - (2y^2 \cdot \overline{\mu - 1} + \mu y - 1)\right];$$

$y$ est évidemment plus grand que l'unité, par conséquent le second terme de la quantité entre crochets est toujours négatif; le premier terme peut avoir un signe quelconque; donc si

$$y = \text{ ou } < \mu,$$

on aura

$$Q^2 - \mu PR < 0,$$

et l'équation aura nécessairement des racines imaginaires; si $y > \mu$, il y aura doute; donc, etc.

Théorème de M. Toeplitz. — *Soit l'équation*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

*si*

$$(n-1) a_1^2 - (n+2) a_2 < 0$$

*l'équation a au moins un couple de racines imaginaires.*

*Démonstration.* — De l'inégalité hypothétique, on tire

$$a_1^2 < 1 \,.\, a_2 \frac{n+2}{n+1};$$

or

$$n > \text{ ou } = 2,$$

donc

$$a_1^2 < 1 \,.\, a_2 \frac{n+n}{n-1}$$

ou

$$a_1^2 < 1 \,.\, a_2 \frac{2}{1} \frac{n}{n-1};$$

donc l'équation a des racines imaginaires d'après le premier corollaire de la formule d'Euler, où l'on ferait $p = 0$.

Théorème VIII. — *Soit*

$$x^m + \ldots + Px^{m-n} + Qx^{m-n-1} + Rx^{m-n-2} + Sx^{m-n-3} + Tx^{m-n-4} + \ldots = 0$$

*une équation complète, ou rendue telle, dont toutes les racines sont réelles. Si les coefficients*

$$P, \quad Q, \quad R, \quad S, \quad T$$

*de cinq termes consécutifs sont tels, que le deuxième et le quatrième soient de même signe, les deux différences*

$$QR - PS, \quad RS - QT$$

*seront de même signe.*

*Démonstration.* — En effet, $\lambda$ désignant une quantité réelle indéterminée, multiplions le premier membre de l'équation donnée par $x^2 - \lambda^2$. Déterminons $\lambda^2$ par la condition que le coefficient du terme en $x^{m-n-1}$, dans ce produit, soit nul, ce qui est toujours possible d'après la seconde partie de l'hypothèse. Alors les coefficients des termes qui comprendront cette lacune devront être de signes contraires, d'après la première partie de l'hypothèse. Si l'on exprime cette circonstance, et qu'on élimine $\lambda^2$, on trouve que les deux différences en question sont de même signe.

*Observation.* — On serait arrivé au même résultat, mais plus laborieusement, si l'on avait employé le multiplicateur

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2,$$

dans lequel $\alpha$ et $\beta$ désignent deux quantités réelles, indéterminées.

*Corollaire.* — Si dans une équation complète, cinq coefficients consécutifs

$$P, \quad Q, \quad R, \quad S, \quad T$$

sont tels, que le deuxième et le quatrième soient de même signe et que les deux différences

$$QR - PS, \quad RS - QT$$

soient de signes contraires, l'équation donnée a des racines imaginaires.

Problème. — *Étant donnée une équation algébrique rationnelle, entière, d'un degré quelconque, complète, et dont toutes les racines sont réelles, on demande : quelles sont les relations qui existent entre les coefficients de quatre termes consécutifs, le rang du premier de ces termes et le degré de l'équation ?*

*Solution.* — Soient : $m$ le degré de l'équation;

$$Px^{m-p}, \quad Qx^{m-p-1}, \quad Rx^{m-p-2}, \quad Sx^{m-p-3},$$

quatre termes consécutifs, et $\lambda$ une quantité réelle, indéterminée. Multiplions le premier membre de l'équation par $x-\lambda$. Toutes les racines de l'équation résultante étant réelles, le théorème d'Euler donne

$$(1) \qquad (R - Q\lambda)^2 = \text{ ou } > \mu(Q - P\lambda)(S - R\lambda),$$

ou bien, en ordonnant par rapport à $\lambda$,

$$(Q^2 - PR\mu)\lambda^2 + [(PS + QR)\mu - 2QR]\lambda \\ + R^2 - QS\mu = \text{ ou } > 0.$$

Cette relation devant avoir lieu, quelle que soit la valeur réelle attribuée à $\lambda$, on a, pour relations demandées,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &Q^2 - PR\mu = \text{ ou } > 0,\\ &R^2 - QS\mu = \text{ ou } > 0,\\ &[(PS + QR)\mu - 2QR]^2\\ &\quad - 4(Q^2 - PR\mu)(R^2 - QS\mu) = \text{ ou } < 0; \end{aligned}\right.$$

les signes se correspondent.

*Corollaire I.* — Si l'on a l'une quelconque des relations

$$Q^2 - PR\mu < 0,$$
$$R^2 - QS\mu < 0,$$
$$[(PS + QR)\mu - 2QR]^2 - 4(Q^2 - PR\mu)(R^2 - QS\mu) = \text{ ou } > 0,$$

on peut conclure que l'équation donnée a des racines imaginaires.

*Observations.* — La première des relations (2) n'est autre chose que l'expression analytique du théorème d'Euler appliqué aux trois termes consécutifs

$$Px^{m-p},\quad Qx^{m-p-1},\quad Rx^{m-p-2};$$

la deuxième, quoique de même forme que la première, n'est pas identique à celle que l'on trouverait si l'on appliquait ce même théorème aux trois termes consécutifs

$$Qx^{m-p1},\quad Rx^{m-p-2},\quad Sx^{m-p-3},$$

parce que la quantité $\mu_1$, relative à ces trois derniers termes, peut avoir une valeur différente de la quantité $\mu$, relative aux trois premiers. Dès lors les deux binômes

$$R^2 - QS\mu,\quad R^2 - QS\mu_1$$

peuvent ne pas avoir le même signe. Celui des deux qui sera négatif accusera la présence des racines imaginaires dans l'équation donnée.

*Corollaire II.* — La seule inspection de l'expression de $\mu$ montre que l'on a toujours $\mu > 1$. Si dans la relation (1) on remplace $\mu$ par l'unité, on aura, *à fortiori*,

$$(R - Q\lambda)^2 > (Q - P\lambda)(S - R\lambda).$$

Cette inégalité devant avoir lieu quel que soit $\lambda$, on en déduit la proposition suivante : Si toutes les racines d'une équation algébrique sont réelles, on a entre les coefficients de quatre termes consécutifs les relations suivantes :

$$Q^2 - PR > 0,$$
$$R^2 - QS > 0,$$
$$(PS - QR)^2 - 4(Q^2 - PR)(R^2 - QS) < 0.$$

L'avant-dernière rélation et l'antépénultième expriment la même proposition. C'est le théorème de De Gua. La dernière relation peut être trouvée directement et de plusieurs manières. (*Voir* les *Nouvelles Annales*, 2^e^ série, t. III, p. 37 et p. 136.)

*Corollaire III.* — Si entre les coefficients de quatre termes consécutifs d'une équation algébrique on a une quelconque des trois relations

$$Q^2 - PR = \text{ ou } < 0,$$
$$R^2 - QS = \text{ ou } < 0,$$
$$(3) \qquad (PS - QR)^2 - 4(Q^2 - PR)(R^2 - QS) = \text{ ou } > 0,$$

l'équation donnée a des racines imaginaires.

Théorème de M. Hermite. — *Lorsque les coefficients de quatre termes consécutifs d'une équation algébrique forment une progression arithmétique, cette équation a nécessairement des racines imaginaires.*

*Démonstration.* — Désignant par $\delta$ la raison de cette progression, on a

$$Q = P + \delta, \quad R = P + 2\delta, \quad S = P + 3\delta,$$

d'où

$$(PS - QR)^2 - 4(Q^2 - PR)(R^2 - QS) = 0;$$

donc, en vertu de la relation (3), l'équation a des racines imaginaires.

THÉORÈME IX. — *Si les coefficients* P, Q, R, S *de quatre termes consécutifs d'une équation algébrique sont tels, que les trois différences*

$$P - Q, \quad Q - R, \quad R - S$$

*soient en progression géométrique, l'équation a des racines imaginaires.*

*Première démonstration.* — On a par hypothèse

$$(Q - R)^2 = (P - Q)(R - S),$$

ce que l'on peut mettre sous la forme

$$-(PS - QR)^2 = (Q^2 - PR) + (R^2 - QS);$$

élevant les deux membres au carré, et remarquant que l'on a toujours

$$a^2 + b^2 = \text{ ou } > 2ab,$$

il vient

$$(PS - QR)^2 - 4(Q^2 - PR)(R^2 - QS) = \text{ ou } > 0,$$

ce qui n'est autre chose que la relation (3); donc, etc.

*Deuxième démonstration.* — Si l'équation donnée avait toutes ses racines réelles, il en serait de même après avoir multiplié son premier membre par $x - 1$, et le théorème de De Gua donnerait

$$(Q - R)^2 > (P - Q)(R - S),$$

ce qui est contre l'hypothèse; donc, etc.

*Observation.* — Ce théorème comporte celui de M. Hermite, car l'équation hypothétique est évidemment satisfaite par

$$P - Q = Q - R = R - S.$$

Théorème de M. Paul Serret. — *Si dans une équation algébrique, quatre termes consécutifs ont leurs coefficients en proportion géométrique, et si, de plus, les antécédents ont le même signe, l'équation aura des racines imaginaires.*

*Démonstration.* — Par hypothèse, on a

$$PS - QR = 0,$$

ce qui donne identiquement

$$(Q^2 - PR)(R^2 - QS) = -\frac{R}{P}(Q^2 - PR)^2.$$

Or P et R sont de même signe, par conséquent la relation (3) est satisfaite; donc, etc.

Théorème X. — *Une équation algébrique complète, d'un degré quelconque,*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

*ne contient que des permanences. Si toutes les racines sont réelles, on a*

$$A_p A_{m-p} (m-p)^2 = \text{ ou } < A_{p+1} A_{m-p-1} (p+1)^2.$$

*Démonstration.* — Appliquons le théorème d'Euler successivement aux trinômes formés par les trois premiers termes, par les trois seconds, par les trois troisièmes, etc., il vient

$$A_1^2 (m-1).1 = \text{ ou } > A_0 A_2\, m.2,$$
$$A_2^2 (m-2).2 = \text{ ou } > A_1 A_3 (m-1).3,$$
$$A_3^2 (m-3).3 = \text{ ou } > A_2 A_4 (m-2).4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{m-1}^2\, 1.(m-1) = \text{ ou } > A_{m-2} A_m\, 2.m;$$

multipliant ces relations, membre à membre, on trouve

$$(4)\qquad A_0 A_m m^2 = \text{ ou } < A_1 A_{m-1} \cdot 1^2,$$

ce qui démontre le théorème pour $p = 0$.

Pour toute racine de l'équation donnée, cette équation devient une identité; à ce point de vue, les dérivées de ses deux membres sont égales, ce qui donne

$$m A_0 x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + \ldots + 2 A_{m-2} x + A_{m-1} = 0.$$

Cette équation a toutes ses racines réelles, d'après le théorème de Rolle. Sa transformée en $\frac{1}{x}$, savoir :

$$A_{m-1} x^{m+1} + 2 A_{m-2} x^{m-2} + \ldots + (Cm-1) A_1 x + m A_0 = 0,$$

aura aussi toutes ses racines réelles. L'équation dérivée de cette dernière équation aura également toutes ses racines réelles et ne contiendra que des permanences. Je lui applique le théorème exprimé par la relation (1), et je trouve

$$A_1 A_{m-1} (m-1)^2 = \text{ ou } < A_2 A_{m-2} 2^2,$$

ce qui démontre le théorème pour $p = 1$.

En continuant de la sorte, on ferait voir que le théorème est vrai pour $p = 2$, $p = 3$; puis on ferait usage de la méthode de Newton, dite de *proche en proche*, pour compléter la démonstration.

*Corollaire I*. — Une équation algébrique complète ne contient que des permanences. Si on a

$$A_p A_{m-p} (m-p)^2 > A_{p+1} A_{m-p-1} (p+1)^2$$

l'équation donnée a des racines imaginaires.

*Corollaire II*. — Si on multiplie membre à membre les $p-1$ relations analogues à (1), et si on désigne par $C^m$ le nombre de combinaisons de $m$ objets pris $p$ à $p$, il vient

$$A_0 A_m (C_p^m)^2 = \text{ ou } < A_p A_{m-p}.$$

*Corollaire III.* — Si une équation algébrique complète ne contient que des permanences, et si de plus elle donne

$$A_0 A_m (C_p^m)^2 > A_p A_{m-p},$$

l'équation donnée a des racines imaginaires.

*Corollaire IV.* — Les mêmes choses étant posées que dans le corollaire précédent, si avec $m > p$ on a

$$A_0 A_m = \text{ ou } > A_p A_{m-p},$$

l'équation donnée a des racines imaginaires, car

$$C_p^m > 1.$$

*Observation générale.* — Si on avait une équation algébrique n'ayant que des variations, on ramènerait la question à ce qui précède par la considération de la transformée en $-x$.

*Notation.* — Nous conviendrons de désigner le produit de la suite naturelle des nombres entiers depuis 1 jusqu'à $k$ inclusivement par $k!$. Cette notation est due à M. Kramp, ancien doyen de la Faculté des Sciences de Strasbourg. Ceci admis, la dérivée, de l'ordre $k$ $(k < m)$, de $y^m$ pourra être mise sous la forme

$$\frac{m!}{(m - k!)} y^{m-k};$$

lorsque $k = m$, la dérivée correspondante, est $m!$. Ces détails trouvent leur application dans le cours de la démonstration du théorème suivant :

Théorème XI. — *Soient*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_p x^{m-p} + \ldots + A_m = 0,$$

*ou plus laconiquement*

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

*une équation algébrique complète, du degré m ; a une quantité réelle indéterminée, et p un quelconque des nombres de la suite* $0, 1, 2, \ldots, (m-2)$. *Si toutes les racines de cette équation sont réelles, on aura*

$$(2) \quad [f^{(m-p-1)}(a)]^2 = \text{ ou } > \frac{p+2}{p+1} f^{(m-p)}(a) f^{(m-p-2)}(a).$$

*Démonstration.* — Posons

$$(3) \qquad x = a + y;$$

$x$ et $a$ étant des quantités réelles, il s'ensuit que $y$ est réel; si on élimine $x$ entre les équations (1) et (3), l'équation résultante, savoir :

$$\frac{f^{(m)}(a)}{m!} y^m + \ldots + \frac{f^{(m-p)}(a)}{(m-p)!} y^{m-p}$$
$$+ \frac{f^{(m-p-1)}(a)}{(m-p-1)!} y^{m-p-1} + \frac{f^{(m-p-2)}(a)}{(m-p-2)!} + \ldots + f(a) = 0,$$

aura toutes ses racines réelles. La dérivée de l'ordre $m-p-2$ du premier membre, égalée à zéro, aura toutes ses racines réelles, d'après le théorème de Rolle. Après quelques réductions, on trouve

$$\frac{f^{(m)}(a)}{(p+2)!} y^{p+2} + \ldots + \frac{1}{2} f^{(m-p)}(a) y^2 + f^{(m-p-1)}(a) y$$
$$+ f^{(m-p-2)}(a) = 0;$$

la transformée de cette équation en $\frac{1}{y}$, savoir :

$$f^{(m-p-2)}(a) y^{p+2} + f^{(m-p-1)}(a) y^{p+1}$$
$$+ \frac{1}{2} f^{(m-p)}(a) y^p + \ldots = 0,$$

aura aussi ses racines réelles. Je prends la dérivée de l'ordre $p$ de chaque membre. L'équation résultante

$$(p+1)(p+2)f^{(m-p-2)}(a)y^2 + 2(p+1)f^{(m-p-1)}(a)y + f^{(m-p)}(a) = 0$$

aura ses racines réelles. Cette équation étant du *second degré,* si l'on écrit la condition qui exprime que ses racines sont réelles, on trouve la formule qu'il fallait démontrer.

*Corollaire I.* — Une équation algébrique a des racines imaginaire si l'on a

$$[f^{(m-p-1)}(a)]^2 < \frac{p+2}{p+1} f^{(m-p)}(a) f^{(m-p-2)}(a).$$

*Corollaire II.* — Une équation algébrique a des racines imaginaires si l'on a

$$[f^{(m-p-1)}(a)]^2 = \text{ ou } < f^{(m-p)}(a) f^{(m-p-2)}(a).$$

*Corollaire III.* — Si dans la formule (2) on fait $a = 0$, on trouve

$$A^2_{p+1} = \text{ ou } > \frac{p+2}{p+1} \frac{m-p}{m-p-1} A_p A_{p+2},$$

ce qui n'est autre chose que la formule d'Euler.

*Observation.* — Le théorème ci-dessus repose sur la formule qui exprime la condition de la réalité des racines de l'équation du deuxième degré à une inconnue. On pourrait trouver un autre théorème fondé sur la condition de la réalité des racines de l'équation du troisième degré. Et en général, si on employait les formules exprimant les conditions de la réalité des racines d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, $(n < m)$ à une inconnue, on trouverait l'énoncé d'un théorème analogue au précédent, qu'on démontrerait de la même manière. Sous le point de vue pratique, ce théorème donnerait lieu à des opérations d'autant plus laborieuses, que $n$ serait plus voisin de $m$ et que $m$ serait plus grand.

(*La suite prochainement.*)