NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. BERTRAND

Étude des surfaces algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 49-56

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__49_0>

ÉTUDE DES SURFACES ALGÉBRIQUES

(voir p. 5).

La surface des ondes, qui s'est offerte à Fresnel dans ses recherches d'optique, a été, au point de vue de la géométrie pure, le sujet d'études très-intéressantes.

La recherche de son équation et l'étude de sa forme n'exigent que l'emploi des méthodes les plus élémentaires; pour les mettre en œuvre, cependant, toute l'habileté des maîtres les plus illustres n'a pas été superflue. L'application régulière des principes généraux peut fournir la solution du problème, et le moindre étudiant a, comme diraient les théologiens de la première provinciale, le pouvoir prochain de la résoudre; mais l'habileté suffisante pour en faire usage est une grâce qui n'est pas donnée à tous. Fresnel lui-même, qui en a deviné le résultat, n'en a pas démontré l'exactitude.

Ampère n'a pas dédaigné de s'exercer à refaire le calcul, simplifié depuis par Cauchy, par M. A. Smith, par M. Lamé et par M. Sylvester, et remplacé, pour les amis de la géométrie pure, par une très-ingénieuse et très-élégante démonstration de Mac Cullach. Fresnel, en donnant l'équation de la surface, avait indiqué, pour chacun de ses points, une construction géométrique très-simple. Que l'on considère un ellipsoïde et par le centre un plan sécant quelconque auquel on élève une perpendiculaire égale en longueur à l'un des deux axes de l'ellipse de section : le lieu des points ainsi obtenus est la surface des ondes.

Nous n'avons pas à dire ici comment Hamilton a découvert les singularités remarquables de cette surface, rattachées bientôt par Mac Cullach à la construction précédente. La surface des ondes contient quatre points singuliers correspondant aux sections circulaires de l'ellipsoïde et pour lesquels le plan tangent est indéterminé, et quatre plans tangents, qui, chacun, les touchent suivant la circonférence d'un cercle.

Les conséquences de ces théorèmes et les brillantes expériences d'optique auxquelles ils ont conduit leur assurent, indépendamment de leur élégance propre, une mention toute spéciale dans l'histoire de la science.

M. Cayley, dont l'habileté dans la combinaison des formules algébriques n'a jamais peut-être été surpassée, s'est proposé, à l'occasion de la surface des ondes, comme il l'a fait pour un grand nombre de problèmes célèbres, la généralisation de ces résultats si élégants et bien vite devenus classiques.

La surface plus générale qu'il nomme *tétraédroïde* est aussi du quatrième ordre. Elle est coupée par les plans d'un certain tétraèdre, suivant des paires de coniques, par rapport auxquelles les trois sommets du tétraèdre, situés dans ce plan, sont des points conjugués. De plus, les seize points d'intersection des quatre paires de coniques sont des points singuliers, en chacun desquels le plan tangent est remplacé par un cône de second degré.

La polaire réciproque d'une tétraédroïde est une tétraédroïde. Les seize cônes qui touchent la surface aux seize points singuliers sont circonscrits quatre à quatre à quatre surfaces du second ordre, et les seize courbes de contact des plans singuliers sont situées quatre à quatre sur quatre surfaces du second ordre.

On déduit de cette surface la surface des ondes de Fresnel, en la transformant homographiquement, de manière que l'un des plans du tétraèdre passe à l'infini, que les trois autres deviennent rectangulaires, et que trois des coniques d'intersection se réduisent à des cercles.

Les surfaces de quatrième ordre, étudiées de nouveau par l'un des plus habiles géomètres contemporains, M. Kummer, ont été pour lui l'occasion de l'un de ces Mémoires, dans lesquels, sous une forme tout élémentaire, on reconnaît la main d'un maître.

Le principe sur lequel il s'appuie est le suivant :

Si une section plane d'une surface du quatrième ordre a un point singulier, le plan sécant est un plan tangent à la surface au point singulier de la section, à moins que celui-ci ne soit en même temps un point singulier de la surface. Lorsqu'un plan coupe une surface de quatrième degré suivant une conique, l'intersection se compose nécessairement de deux coniques, et leur ensemble, considéré comme courbe du quatrième degré, a nécessairement quatre points doubles. Si l'une des coniques se réduit à deux droites, le nombre de ces points s'élève à cinq, et il devient enfin égal à six lorsque les deux coniques se transforment en quatre droites. Réciproquement, si l'intersection d'un plan avec une surface du quatrième degré contient quatre ou un nombre plus grand de points doubles, elle se décompose nécessairement en lignes de degré inférieur à quatre, car une courbe irréductible de quatrième degré ne peut jamais avoir plus de trois points doubles. Lorsque le nombre des points doubles est égal à quatre, et que trois d'entre eux ne sont pas en ligne droite, l'intersection se réduit nécessairement à deux coniques; lorsque trois sont en ligne droite, elle se compose de cette droite elle-même et d'une ligne de troisième ordre. Si le nombre des points doubles est cinq, l'intersection se compose de deux lignes droites et d'une conique, et lorsqu'il est six enfin, de quatre lignes droites.

Partant de ces principes, M. Kummer recherche toutes les surfaces du quatrième degré sur lesquelles se trouvent un nombre infini de coniques.

La première classe est celle des surfaces coupées suivant des coniques par des plans qui ne sont pas tangents.

Elles comprennent :

1° Toutes les surfaces ayant une courbe double du second degré et deux points doubles isolés :

Les plans passant par ces points les coupent suivant deux coniques;

A cette classe appartiennent le tore et la cyclide;

2° Les surfaces ayant une droite double :

Tous les plans passant par cette droite la coupent suivant des coniques ;

3° Les surfaces qui se touchent elles-mêmes en deux points différents :

Elles sont coupées par les plans passant par ces deux points suivant des paires de coniques qui se touchent en ces points.

En résumé, si une série de plans non tangents à une surface du quatrième ordre la coupe suivant des coniques, tous ces plans passent nécessairement par une même droite.

Lorsque les plans qui coupent les surfaces suivant les coniques sont tangents à la surface, celle-ci peut appartenir à plusieurs genres distincts :

1° Les surfaces qui possèdent trois lignes droites doubles passant par un seul et même plan sont coupées par tous leurs plans tangents suivant des paires de coniques :

Les surfaces de ce genre ont été considérées par Steiner, qui, sans rien publier de ses recherches, a verbalement indiqué leurs propriétés à plusieurs de ses amis;

Le point de vue sous lequel elles se sont présentées à lui est fort différent de celui de M. Kummer ;

2° Les surfaces sur lesquelles se trouve une ligne double du second ordre, et en outre un seul point double :

Tous les plans tangents menés par ce point double la coupent suivant des coniques;

3° Il existe enfin des surfaces coupées suivant des coniques par leurs plans tangents doubles; ce sont celles qui ont une ligne double de second ordre.

Une autre classe intéressante de surfaces est celle des développables circonscrites à deux surfaces du second degré.

Lorsque les surfaces considérées sont deux sphères, la développable circonscrite se réduit à deux cônes, dont on sait l'importance dans la théorie des éclipses. Pour étudier de plus près la question d'astronomie, Laplace, dans la *Mécanique céleste,* cherche à remplacer les deux sphères par des ellipsoïdes; mais les formules qu'il donne sont seulement approchées et n'avancent que très-peu la question de géométrie pure traitée pour la première fois par M. Poncelet avec toute la pénétration et la perspicacité géométrique qui brillent à un si haut degré dans le beau Mémoire où ce problème figure incidemment.

Il montre que la surface développable circonscrite à deux surfaces de second ordre offre, en général, quatre lignes de striction simples, distinctes, planes et du second ordre seulement.

Les courbes de contact des deux surfaces avec les développables circonscrites sont des courbes de quatrième ordre, placées à l'intersection des surfaces proposées et de deux autres surfaces, comme elles, du second degré.

La surface elle-même est du huitième ordre seulement, comme M. Chasles l'a montré le premier dans son *Aperçu historique*.

Cette surface est, on le prouve aisément, circonscrite à un nombre infini de surfaces du second ordre, auxquelles cette circonstance donne un grand nombre de propriétés communes. Elles ont, par exemple, leurs centres en ligne droite, et, plus généralement, tous les pôles d'un même plan, par rapport à ces diverses surfaces, forment toujours une ligne droite ; les diamètres conjugués aux plans diamétraux parallèles à un plan donné forment un paraboloïde, et chacune d'elles enfin coupe la développable circonscrite suivant huit de ses génératrices. Ces théorèmes sont dus à MM. Poncelet, Cremona, Salmon et de la Gournerie. Quoique énoncés en langage géométrique, ils ont, comme toutes les propositions analogues relatives aux surfaces algébriques, de véritables relations analytiques dont la généralité, qui ne souffre aucune restriction, force à considérer en même temps et à assigner le même caractère aux figures dans lesquelles les propriétés considérées appartiennent à des éléments imaginaires.

M. Chasles, par exemple, démontre cette proposition dont il déduit, avec un grand nombre de conséquences importantes et nouvelles, toute une théorie des surfaces homofocales du second degré.

Toutes les surfaces homofocales du second ordre sont inscrites dans une même surface développable, dont l'une des coniques doubles est le cercle imaginaire situé à l'infini.

L'étude des surfaces circonscrites à deux surfaces du second ordre est inséparable de celle de la courbe d'intersection de deux telles surfaces et de la développable dont elle est l'arête de rebroussement. Les liens établis entre les deux problèmes par la théorie des polaires réciproques sont tels, en effet, que tout résultat relatif à l'un d'eux en fournit aussitôt un autre d'importance égale relatif à l'autre.

Cette surface possède quatre lignes doubles planes du quatrième ordre, comme l'ont montré MM. Chasles et Salmon; elle est, en général, du huitième ordre, mais peut, dans certains cas, comme l'a démontré M. Cayley, s'abaisser au sixième ordre.

M. de la Gournerie a été conduit, par son enseignement et par ses études de géométrie descriptive, à s'occuper de la développable circonscrite à deux surfaces du second degré, qui se présente non-seulement dans la théorie des éclipses, mais dans certaines questions de terrassement. Trois des coniques doubles sont concentriques; la quatrième disparaît et passe à l'infini. L'intersection des plans de deux quelconques des premières est perpendiculaire au plan de la troisième, et leurs projections horizontales sont des coniques homofocales (*).

Plusieurs épures de son *Traité de Géométrie descriptive* et un modèle en fils, montrant dans un cas intéressant l'agencement des nappes de la surface, indiquent d'ailleurs le point de vue principalement pratique auquel le savant s'est placé dans ses premiers travaux. Dans l'ouvrage dont le titre figure en tête de cet article, M. de la Gournerie, prenant pour point de départ l'étude des surfaces développables circonscrites à deux surfaces du second ordre, cherche à les généraliser en étendant à des surfaces réglées non développables quelques-unes de leurs propriétés les plus remarquables, et cette extension suffirait, comme l'a dit M. Chasles, pour fixer l'attention des géomètres sur le Mémoire qui lui est consacré.

La surface nouvelle que M. de la Gournerie nomme *quadrispinale* est du huitième ordre; elle a quatre coniques doubles, dont l'une est située à l'infini, et une autre ligne double du douzième ordre. Deux quelconques des coniques doubles suffisent d'ailleurs pour construire la surface et pour la définir; lorsqu'on la considère comme engendrée par une ligne droite qui s'appuie sur trois co-

---

(*) M. Cremona a donne de remarquables démonstrations de ces théorèmes dans le t. IV, 2e serie, des *Nouvelles Annales*, p. 271.

niques, il est nécessaire d'établir entre celles-ci une certaine dépendance, sans laquelle la surface deviendrait du seizième ordre et ne serait plus une quadrispinale; lorsque les conditions sont remplies, la surface, toujours du seizième ordre, se décompose en deux quadrispinales.

M. de la Gournerie, dans un autre Mémoire, étudie la surface corrélative de la quadrispinale, et qu'il nomme *quadricuspidale*, parce qu'elle possède quatre points quadruples, qu'il regarde comme des sommets, et qui sont les sommets de quatre cônes du second ordre doublement circonscrits à la surface; cette nouvelle surface possède cinq lignes doubles du quatrième ordre : l'une est gauche et les autres planes. Chacune de celles-ci passe par trois des quatre sommets de la surface, et a, en chacun de ces points, un point double.

L'examen très-approfondi de ces deux surfaces, les relations de la quadrispinale avec une série d'hyperboloïdes dont chacune a avec elle huit génératrices communes et qui sont toutes inscrites dans une même développable, l'examen particulier du cas où la quadrispinale se réduit à deux surfaces de quatrième ordre, et les généralisations fort étendues qui composent un second Mémoire, forment un ensemble intéressant de recherches dont le résumé, même sommaire, ne peut cependant trouver place dans le *Journal des Savants*. Nos lecteurs géomètres nous sauront gré de les leur avoir signalées.

Plusieurs des résultats contenus dans cet ouvrage ont attiré l'attention de M. Cayley, dont les remarques intéressantes, placées à la fin de chaque Mémoire, sont à la fois un ornement pour le livre, et, pour notre savant compatriote, le témoignage, non moins précieux que dignement mérité, de l'estime particulière du grand géomètre anglais.

J. Bertrand.

(Extrait du *Journal des Savants*.)