NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. PAINVIN

Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 481-501

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__481_0>

DISCUSSION DE L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. L. PAINVIN.

PRÉLIMINAIRES.

1. Soient les équations de deux surfaces du second ordre

$$
(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\mathrm{S})\ A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz\\
&\qquad + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\mathrm{T})\ B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + B_{33}z^2 + B_{44}t^2 + 2B_{12}xy + 2B_{13}xz\\
&\qquad + 2B_{14}xt + 2B_{23}yz + 2B_{24}yt + 2B_{34}zt = 0;
\end{aligned}\right.
$$

ces deux équations, prises simultanément, représentent une courbe, intersection des deux surfaces considérées.

L'équation générale des surfaces du second ordre, passant par cette courbe, est

$$\mathrm{S} + \lambda \mathrm{T} = 0,$$

ou

$$
(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&(A_{11} + \lambda B_{11})x^2 + (A_{22} + \lambda B_{22})y^2 + (A_{33} + \lambda B_{33})z^2\\
&\quad + (A_{44} + \lambda B_{44})t^2 + 2(A_{12} + \lambda B_{12})xy + 2(A_{13} + \lambda B_{13})xz\\
&\quad + 2(A_{14} + \lambda B_{14})xt + 2(A_{23} + \lambda B_{23})yz\\
&\qquad + 2(A_{24} + \lambda B_{24})yt + 2(A_{34} + \lambda B_{24})zt = 0,
\end{aligned}\right.
$$

λ étant une constante arbitraire. L'équation (3) représente un cône, si l'on a

$$
(4)\quad \begin{vmatrix}
A_{11} + \lambda B_{11} & A_{12} + \lambda B_{12} & A_{13} + \lambda B_{13} & A_{14} + \lambda B_{14}\\
A_{21} + \lambda B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} & A_{23} + \lambda B_{23} & A_{24} + \lambda B_{24}\\
A_{31} + \lambda B_{31} & A_{32} + \lambda B_{32} & A_{33} + \lambda B_{33} & A_{34} + \lambda B_{34}\\
A_{41} + \lambda B_{41} & A_{42} + \lambda B_{42} & A_{43} + \lambda B_{43} & A_{44} + \lambda B_{44}
\end{vmatrix} = 0,
$$

car le premier membre de l'équation (3) peut alors se ramener à une fonction homogène de trois variables. Les coordonnées des sommets de ces cônes seront fournies par les équations

$$(4\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} S'_x + \lambda T'_x &= 0,\\ S'_y + \lambda T'_y &= 0,\\ S'_z + \lambda T'_z &= 0,\\ S'_t + \lambda T'_t &= 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on développe l'équation (4), on aura une équation en λ de la forme

$$(5)\qquad \Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 + \Theta_1\lambda + \Delta_1 = 0;$$

Δ et Δ_1 sont les discriminants des fonctions S et T.

On voit par là que l'équation en λ ne saurait avoir de racines réelles ou infinies que dans le cas où l'une des surfaces considérées se réduit à un cône.

Je ne ferai que rappeler la proposition suivante, dont la démonstration est facile (*voir* mon *Analytique à deux dimensions*, n° 881).

L'équation en λ conserve les mêmes racines, lorsqu'on rapporte les surfaces du second ordre à un nouveau système quelconque de coordonnées, soit cartésiennes, soit tétraédriques.

La situation respective des deux surfaces S et T, ou la nature de leur courbe d'intersection, dépend complétement de la nature des racines de l'équation en λ; la discussion de cette équation, discussion qui jusqu'à présent n'a pas encore été faite, présente donc un très-grand intérêt, soit au point de vue de la théorie, soit au point de vue des applications.

2. Si l'on suppose distinctes les quatre racines de l'é-

quation en λ, on aura quatre cônes passant par la courbe d'intersection, Γ, des deux surfaces S et T; je choisirai, pour sommets du *tétraèdre de référence* ABCD, les sommets distincts de ces quatre cônes. D'après cela, si λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sont les racines de l'équation (4), on devra avoir pour $\lambda = \lambda_1$, par exemple, un cône ayant son sommet en A, c'est-à-dire que l'équation (3) ne devra pas renfermer de termes en x; on conclura de là :

$$\frac{A_{11}}{B_{11}} = \frac{A_{12}}{B_{12}} = \frac{A_{13}}{B_{13}} = \frac{A_{14}}{B_{14}} = -\lambda_1;$$

on aura de même, en écrivant que pour $\lambda = \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ l'équation (3) représente des cônes ayant respectivement leurs sommets en B, C, D :

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{A_{22}}{B_{22}} = \frac{A_{23}}{B_{23}} = \frac{A_{24}}{B_{24}} = -\lambda_2,$$

$$\frac{A_{31}}{B_{31}} = \frac{A_{32}}{B_{32}} = \frac{A_{33}}{B_{33}} = \frac{A_{34}}{B_{34}} = -\lambda_3,$$

$$\frac{A_{41}}{B_{41}} = \frac{A_{42}}{B_{42}} = \frac{A_{43}}{B_{43}} = \frac{A_{44}}{B_{44}} = -\lambda_4.$$

Or, d'après l'hypothèse admise, les racines λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sont différentes; les égalités précédentes conduisent alors aux valeurs qui suivent :

$$A_{12} = 0,\quad A_{13} = 0,\quad A_{14} = 0,\quad A_{23} = 0,\quad A_{24} = 0,\quad A_{34} = 0;$$
$$B_{12} = 0,\quad B_{13} = 0,\quad B_{14} = 0,\quad B_{23} = 0,\quad B_{24} = 0,\quad B_{34} = 0.$$

Les équations des deux surfaces (S) et (T) se trouvent donc ramenées à la forme

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (S) & a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 t^2 = 0, \\ (T) & b_1 x^2 + b_2 y^2 + b_3 z^2 + b_4 t^2 = 0. \end{array}\right.$$

L'équation générale des surfaces du second ordre, passant par la courbe d'intersection des deux surfaces S et T, est alors

$$(7)\quad (a_1+\lambda b_1)x^2+(a_2+\lambda b_2)y^2+(a_3+\lambda b_3)z^2+(a_4+\lambda b_4)t^2=0,$$

et l'équation en λ devient

$$(8)\qquad (a_1+\lambda b_1)(a_2+\lambda b_2)(a_3+\lambda b_3)(a_4+\lambda b_4)=0.$$

En substituant dans l'équation (7) les valeurs de λ fournies par l'équation (8), on trouve, pour les équations des quatre cônes passant par la courbe d'intersection des surfaces S et T :

$$(9)\left\{\begin{array}{lll}
(C_1) & (a_2 b_1 - a_1 b_2)y^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)z^2 & \\
& \qquad + (a_4 b_1 - a_1 b_4)t^2 = 0, & \text{sommet A;}\\
(C_2) & (a_1 b_2 - a_2 b_1)x^2 + (a_3 b_2 - a_2 b_3)z^2 & \\
& \qquad + (a_4 b_2 - a_2 b_4)t^2 = 0, & \text{sommet B;}\\
(C_3) & (a_1 b_3 - a_3 b_1)x^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)y^2 & \\
& \qquad + (a_4 b_3 - a_3 b_4)t^2 = 0, & \text{sommet C;}\\
(C_4) & (a_1 b_4 - a_4 b_1)x^2 + (a_2 b_4 - a_4 b_2)y^2 & \\
& \qquad + (a_3 b_4 - a_4 b_3)t^2 = 0, & \text{sommet D.}
\end{array}\right.$$

Des équations (9) on conclut cette proposition multiple :

Lorsque l'équation en λ a quatre racines distinctes, il y a quatre cônes du second ordre passant par la courbe d'intersection Γ des deux surfaces du second ordre considérées.

Les sommets de ces quatre cônes FORMENT UN TÉTRAÈDRE ABCD CONJUGUÉ *par rapport à chacune des surfaces du second ordre; plus généralement, ce tétraèdre est conjugué par rapport à toutes les surfaces du second ordre qui passent par la courbe gauche Γ.*

Chacun des cônes est lui-même conjugué par rapport au trièdre dont le sommet coïncide avec celui du cône.

On voit encore par les équations (4 *bis*) que :

La détermination des sommets des cônes du second degré, qui passent par l'intersection de deux surfaces du second ordre, revient à la recherche des points qui ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces.

Enfin, la forme simple des équations (6) permet de démontrer très-facilement que :

La courbe gauche, intersection des deux surfaces S *et* T, *est de quatrième ordre et de huitième classe.*

3. La discussion complète de l'équation en λ exige l'examen des différentes hypothèses qui suivent :

1° Les quatre racines de l'équation en λ sont réelles ;

2° Deux racines sont réelles, et deux sont imaginaires ;

3° Les quatre racines sont imaginaires ;

4° L'équation en λ a deux racines égales ;

5° Elle a trois racines égales ;

6° Elle a deux couples de racines égales ;

7° Les quatre racines sont égales ;

8° L'équation en λ a une ou plusienrs racines nulles ;

9° L'équation en λ a des racines nulles et des racines infinies ;

10° Cas où l'équation en λ se réduit à une identité ;

11° Détermination des branches infinies de la courbe d'intersection.

Il est visible que un ou plusieurs des cônes, passant par la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre, peuvent avoir leur sommet à l'infini, c'est-à-dire peuvent devenir des cylindres. Je ferai abstraction de ces cas particuliers dans la discussion que je vais développer ;

d'ailleurs les conclusions resteront les mêmes, et on pourra toujours les soumettre à une analyse tout à fait semblable à celle qui sera exposée.

§ I. — *L'équation en λ a ses quatre racines réelles.*

4. *Lorsque l'équation en λ a ses quatre racines réelles, les sommets des quatre cônes C_1, C_2, C_3, C_4 sont réels. Si les quatre cônes sont réels, la courbe d'intersection des deux surfaces est toujours réelle; si deux des cônes sont imaginaires, la courbe d'intersection est toujours imaginaire; les quatre cônes ne peuvent pas être tous quatre imaginaires.*

Les sommets des cônes qui passent par la courbe d'intersection des deux surfaces sont réels, car leurs coordonnées sont fournies par les équations (4 *bis*) n° 1; or ces équations sont à coefficients réels, puisque, d'après l'hypothèse, les valeurs de λ sont réelles. En prenant les sommets de ces quatre cônes pour sommet du tétraèdre de référence ABCD, les équations des deux surfaces seront, n° 2,

$$(10)\qquad \begin{cases} (S) & ax^2 + by^2 + cz^2 + t^2 = 0, \\ (T) & a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + t^2 = 0; \end{cases}$$

a, b, c, a_1, b_1, c_1 étant des *coefficients réels*.

On déduit de là, pour les équations des quatre cônes C_1, C_2, C_3, C_4,

$$(11)\qquad \begin{cases} (C_1) & Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0, \\ (C_2) & C_1 y^2 - B_1 z^2 + At^2 = 0, \\ (C_3) & -C_1 x^2 + A_1 z^2 + Bt^2 = 0, \\ (C_4) & B_1 x^2 - A_1 y^2 + Ct^2 = 0, \end{cases}$$

après avoir posé

$$(12)\qquad \begin{cases} A = a - a_1, & A_1 = bc_1 - b_1 c, \\ B = b - b_1, & B_1 = ca_1 - c_1 a, \\ C = c - c_1, & C_1 = ab_1 - a_1 b; \end{cases}$$

d'où résulte l'identité

$$(13)\qquad AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

Il est d'abord visible que :

1° Les quatre cônes peuvent être réels;

2° Il peut y avoir des cônes imaginaires, mais il y en a au plus deux.

En effet, si l'on suppose, par exemple,

$$A > 0,\quad B > 0,\quad C < 0,\quad A_1 > 0,\quad B_1 > 0,\quad C_1 > 0,$$

l'identité (13) peut être satisfaite, et les quatre cônes (11) sont évidemment réels.

Cherchons maintenant s'ils peuvent être tous quatre imaginaires; il faudrait d'abord que l'on eût

$$A > 0,\quad B > 0,\quad C > 0;$$

mais, pour que l'identité (13) soit vérifiée, il faudrait qu'une au moins des quantités A_1, B_1, C_1 fût négative; on voit alors qu'il y a toujours, parmi les cônes (11), deux cônes réels et deux cônes imaginaires.

5. Si les quatre cônes (11) sont réels, les trois quantités A, B, C doivent avoir des signes différents; supposons d'abord

$$(1^\circ)\qquad A > 0,\quad B > 0,\quad C < 0;$$

les signes de A_1, B_1, C_1 restant arbitraires, on pourra toujours faire en sorte que les cônes soient réels, tout en vérifiant l'identité (13). Nous pouvons construire la courbe d'intersection des deux surfaces à l'aide des deux cônes ayant respectivement leurs sommets en A et en B, ou, ce qui revient au même, en cherchant les intersections des surfaces (10) par des plans passant par la droite AB.

L'équation d'un tel plan sera

$$(2^\circ) \qquad t = \alpha z;$$

en substituant cette valeur de t dans les équations (10) des deux surfaces, on trouve

$$ax^2 + by^2 + (c + \alpha^2) z^2 = 0,$$
$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + (c_1 + \alpha^2) z^2 = 0;$$

d'où, en résolvant par rapport à x^2 et y^2, et en ayant égard aux notations (12),

$$(3^\circ) \qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{B\alpha^2 + A_1}{C_1} z^2, \\ y^2 = \dfrac{B_1 - A\alpha^2}{C_1} z^2. \end{cases}$$

Pour que la courbe d'intersection soit réelle, il faut et il suffit qu'on puisse disposer de α de manière que les valeurs (3°) de x et de y soient réelles.

Soit, en premier lieu, $C_1 > 0$; il faut et il suffit que

$$(4^\circ) \quad B\alpha^2 + A_1 > 0, \quad B_1 - A\alpha^2 > 0, \quad \text{ou} \quad -\frac{A_1}{B} < \alpha^2 < \frac{B_1}{A}.$$

Pour que cette double inégalité puisse être satisfaite, il faut d'abord que

$$-\frac{A_1}{B} < \frac{B_1}{A}, \quad \text{ou} \quad AA_1 + BB_1 > 0,$$

ou enfin, d'après l'identité (13),

$$-CC_1 > 0;$$

inégalité vraie, puisque C est négatif, et C_1 positif. Mais il faut, en outre, que α^2 soit positif, c'est-à-dire que la limite supérieure $\frac{B_1}{A}$ soit positive, ce qui aura lieu, si l'on suppose B_1 positif ; or cette supposition est nécessaire, car, si B_1 était négatif, le cône C_2 serait imaginaire. On voit d'ailleurs que, dans les hypothèses actuelles, les quatre cônes sont réels.

Soit, en second lieu, $C_1 < 0$; il faut et il suffit que

$$(5^\circ) \quad B\alpha^2 + A_1 < 0, \quad B_1 - A\alpha^2 < 0, \quad \text{ou} \quad \frac{B_1}{A} < \alpha^2 < -\frac{A_1}{B}.$$

Pour que cette double inégalité puisse être satisfaite, il faut d'abord que

$$\frac{B_1}{A} < -\frac{A_1}{B}, \quad \text{ou} \quad AA_1 + BB_1 < 0,$$

ou enfin, d'après l'identité (13),

$$-CC_1 < 0;$$

inégalité vraie, puisque C et C_1 sont négatifs. Mais il faut, en outre, que α^2 soit positif, c'est-à-dire que la limite supérieure $-\frac{A_1}{B}$ soit positive ; or si A_1 était positif, l'identité (13) exigerait que B_1 fût négatif, le cône C_4 serait alors imaginaire ; A_1 doit donc être négatif, et on pourra toujours obtenir des valeurs réelles pour x et y. On peut encore constater que, dans les hypothèses admises, les quatre cônes sont réels.

Ainsi, lorsqu'on suppose les quatre cônes réels, et qu'on admet les inégalités

$$A > 0, \quad B > 0, \quad C < 0,$$

la courbe d'intersection des deux surfaces est nécessairement réelle. Il resterait à examiner les hypothèses

$$A > 0,\quad B < 0,\quad C < 0;\quad \text{puis}\quad A > 0,\quad B < 0,\quad C > 0,$$

car on peut toujours supposer A positif; mais il est évident que, pour la première hypothèse, par exemple, nous n'aurons qu'à reproduire identiquement la discussion précédente, en prenant un plan passant par BC; et pour la deuxième hypothèse, il suffira de prendre un plan passant par AC.

6. Lorsque deux des cônes sont imaginaires, la courbe d'intersection des deux surfaces est imaginaire.

Car si cette courbe était réelle, en joignant ses différents points aux sommets réels A, B, C, D des quatre cônes, on obtiendrait quatre cônes réels.

7. *Lorsque la courbe d'intersection est réelle, un plan quelconque passant par les arêtes du tétraèdre* ABCD *rencontre la courbe ou en quatre points réels ou en quatre points imaginaires.*

En effet, si nous prenons un plan passant par AB, $t = \alpha z$, ses intersections avec les surfaces (10) seront données par les équations

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + (c + \alpha^2) z^2 = 0, \\ a_1 x^2 + b_1 y^2 + (c_1 + \alpha^2) z^2 = 0. \end{cases}$$

Or ces deux équations peuvent être assimilées à celles de deux coniques; l'équation en μ, donnant les systèmes de cordes communes, sera

$$\begin{vmatrix} a + \mu a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b + \mu b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c + \mu c_1 + \alpha^2 (\mu + 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Les trois racines de cette équation sont réelles, quel que soit α; ces deux coniques se coupent donc en quatre points réels ou en quatre points imaginaires; par suite, les cônes correspondants se couperont suivant quatre génératrices réelles, ou quatre génératrices imaginaires; donc, etc.

§ II. — *L'équation en λ a deux racines réelles et deux imaginaires.*

8. *Lorsque l'équation en λ a deux racines réelles et deux imaginaires, deux des sommets sont réels, et les deux autres sont imaginaires conjugués; les deux cônes correspondant aux sommets réels sont réels, et les deux cônes correspondant aux sommets imaginaires sont nécessairement imaginaires. La courbe d'intersection des deux surfaces est toujours réelle.*

A une valeur réelle de λ correspond un sommet réel, et à une valeur imaginaire correspond un sommet imaginaire, car les équations (4 *bis*) n° 1, qui déterminent les coordonnées de ces sommets, sont du premier degré par rapport à x, y, z, t et λ.

Je dis maintenant que le cône correspondant à une valeur imaginaire de λ est nécessairement imaginaire; car, si $\lambda = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, l'équation (3) n° 1, qui représente ce cône, devient

$$(S + \alpha T) + \beta\sqrt{-1}\,T = 0;$$

or, si cette dernière équation représentait un cône réel, on aurait à la fois

$$S = 0, \quad T = 0$$

pour tous les points réels du cône représenté; les équations $S = 0$, $T = 0$ représenteraient alors toutes deux le même cône : c'est un cas qui n'exige évidemment aucune discussion.

Nous verrons plus loin que les cônes correspondant aux racines réelles sont eux mêmes réels.

9. Soient A et B les sommets réels ; désignons par CD la droite réelle sur laquelle se trouvent les deux sommets imaginaires conjugués. Je prendrai pour tétraèdre de référence un tétraèdre ayant pour sommets les deux points réels A et B, et pour arête opposée la droite CD : les sommets C et D restent pour le moment arbitraires.

D'après les propriétés énoncées au n° 2, le choix du tétraèdre indiqué revient à dire que le plan polaire d'un point quelconque de AB, par rapport aux deux surfaces, passe par CD, et inversement ; et, en outre, que le plan polaire du point A, par rapport aux surfaces, passe par le point B, et inversement.

Prenons les équations générales (1) et (2), n° 1, le plan polaire d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0), par rapport à la première surface, a pour équation

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} & x_0(A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + A_{14}t) \\ & + y_0(A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + A_{24}t) \\ & + z_0(A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + A_{34}t) \\ & + t_0(A_{41}x + A_{42}y + A_{43}z + A_{44}t) = 0. \end{aligned}\right.$$

Les coordonnées d'un point quelconque situé sur AB sont $(x_0, y_0, z_0 = 0, t_0 = 0)$; le plan (14) doit passer par CD, quel que soit ce point, c'est-à-dire que son équation ne doit renfermer que les termes en x et en y, et cela quels que soient x_0 et y_0 ; on devra donc avoir

$$(1^\circ)\qquad A_{13} = 0,\quad A_{23} = 0,\quad A_{14} = 0,\quad A_{24} = 0,$$

et alors les plans polaires des points de CD passeront par AB.

Si maintenant on exprime que le plan polaire du point A $(y_0 = 0, z_0 = 0, t_0 = 0)$ passe par le point B, il en résulte

$$(2^\circ) \qquad A_{12} = 0,$$

et alors le plan polaire du point B passera par le sommet A.

Les équations des deux surfaces se présenteront donc toutes deux sous la forme

$$A_{11} x^2 + A_{22} y^2 + A_{33} z^2 + A_{44} t^2 + 2 A_{34} zt = 0.$$

Les coefficients de x^2 et de y^2 ne peuvent pas être nuls dans ces équations, car, dans l'une ou l'autre hypothèse, ces équations représenteraient des cônes, et l'équation en λ aurait alors des racines nulles ou infinies. Nous pouvons donc supposer égaux à l'unité les coefficients de α^2, et les équations des deux surfaces se ramèneront à la forme

$$(15) \qquad \begin{cases} (\mathrm{S}) & x^2 + a y^2 + b z^2 + c t^2 + 2 d zt = 0, \\ (\mathrm{T}) & x^2 + a_1 y^2 + b_1 z^2 + c_1 t^2 + 2 d_1 zt = 0, \end{cases}$$

les coefficients a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 étant des quantités réelles.

L'équation en λ devient alors

$$(16) \quad (\lambda + 1)(a + \lambda a_1)[(b + \lambda b_1)(c + \lambda c_1) - (d + \lambda d_1)^2] = 0.$$

Nous allons maintenant déterminer les sommets des deux cônes imaginaires, c'est-à-dire les deux points situés sur l'arête CD et ayant même plan polaire par rapport aux deux surfaces (15).

Les coordonnées d'un point situé sur CD sont $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, z_0, t_0; les polaires de ce point, par rapport aux surfaces (15), auront pour équations

$$z(bz_0 + dt_0) + t(dz_0 + ct_0) = 0,$$

$$z(b_1 z_0 + d_1 t_0) + t(d_1 z_0 + c_1 t_0) = 0;$$

exprimons que ces deux plans coïncident, il vient, en développant

$$(17)\ (bd_1 - b_1 d) z_0^2 + (bc_1 - b_1 c) z_0 t_0 + (dc_1 - d_1 c) t_0^2 = 0.$$

D'après l'hypothèse admise, ces coordonnées sont imaginaires; or, dans ce cas, on pourra disposer de la position des sommets C et D du tétraèdre de référence, sur la droite réelle CD, de manière que

$$(18)\qquad bc_1 - b_1 c = 0, \quad \text{et} \quad bd_1 - b_1 d = dc_1 - d_1 c :$$

je justifierai tout à l'heure cette assertion.

Des égalités (18) on conclut

$$(18\ bis)\qquad \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k, \quad (b + c)(d_1 - kd) = 0;$$

mais on ne peut pas admettre l'égalité $d_1 - kd = 0$, car l'équation (16) en λ aurait alors deux racines égales; on a donc

$$(18\ ter)\qquad b + c = 0, \quad b_1 + c_1 = 0.$$

Par conséquent, *les équations des deux surfaces peuvent être amenées à la surface définitive*

$$(19)\quad \left\{ \begin{array}{ll} (\mathrm{S}) & x^2 + ay^2 + b(z^2 + t^2) + 2dzt = 0, \\ (\mathrm{T}) & x^2 + a_1 y^2 + b_1 (z^2 + t^2) + 2d_1 zt = 0, \end{array} \right.$$

a, b, d, a_1, b_1, d_1 étant des coefficients réels.

10. Pour justifier l'assertion sur laquelle s'appuie cette réduction, je remarque que si, conservant les deux plans fixes ACD et BCD du tétraèdre de référence, on prend deux plans ABC′ et ABD′, les coordonnées x et y d'un point ne changeront pas, mais les coordonnées z et t prendront de nouvelles valeurs z' et t'. Soient

$$z - \alpha t = 0, \quad z - \beta t = 0,$$

les équations des deux nouveaux plans ABC′ et ABD′, les distances z' et t' du point (x, y, z, t) à ces deux plans seront

$$(20)\quad z' = \frac{z - \alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\theta}}, \quad t' = \frac{z - \beta t}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta\cos\theta}},$$

θ étant l'angle des deux plans fixes ACD et BCD.

Ceci posé, si l'on a une équation telle que

$$(21)\qquad Mz^2 + 2Nzt + Pt^2 = 0,$$

cette équation deviendra, en y remplaçant z et t par les valeurs que fournissent les formules (20),

$$(21\ bis)\qquad M_1 z'^2 + 2N_1 z't' + P_1 t'^2 = 0.$$

Or, si l'on admet l'inégalité

$$(22)\qquad N^2 - MP < 0,$$

qui exprime que les racines de l'équation (21) sont imaginaires, on pourra toujours trouver pour α et β des valeurs réelles, de manière qu'on ait à la fois

$$(23)\qquad N_1 = 0, \quad M_1 = P_1.$$

On est, en effet, conduit aux deux équations de condition

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &M\alpha\beta + N(\alpha + \beta) + P = 0, \\ &\alpha\beta(M\cos\theta + N) + \frac{P - M}{2}(\alpha + \beta) - (P\cos\theta + N) = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, pour que les valeurs de α et de β soient réelles, il faut et il suffit que

$$\begin{aligned}&(MN + 2MP\cos\theta + PN)^2 \\ &\quad - (M^2 + 2MN\cos\theta + N^2 - Q^2)(P^2 + 2NP\cos\theta + N^2 - Q^2) > 0,\end{aligned}$$

après avoir posé

$$Q^2 = MP - N^2;$$

en développant cette inégalité, on trouve

$$(25)\quad (\mathrm{MP}-\mathrm{N}^2)\left\{[2\mathrm{N}+(\mathrm{M}+\mathrm{P})\cos\theta]^2+(\mathrm{M}-\mathrm{P})^2\sin^2\theta\right\}>0,$$

inégalité qui est toujours vraie si l'on a égard à l'hypothèse (22).

11. Ceci démontré, reprenons les deux équations réduites (19)

$$(19)\quad \begin{cases} (\mathrm{S}) & x^2+ay^2+b(z^2-t^2)+2dzt=0, \\ (\mathrm{T}) & x^2+a_1y^2+b_1(z^2-t^2)+2d_1zt=0; \end{cases}$$

l'équation générale des surfaces, passant par la courbe d'intersection de S et T, est

$$(26)\quad \begin{cases} (\lambda+1)x^2+(a_1+\lambda a)y^2+(b_1+\lambda b)(z^2-t^2) \\ \qquad\qquad +2(d_1+\lambda d)zt=0, \end{cases}$$

et l'équation en λ devient

$$(27)\quad (\lambda+1)(a_1+\lambda a)[(b_1+\lambda b)^2+(d_1+\lambda d)^2]=0.$$

Les équations des deux cônes ayant leurs sommets aux points réels A et B sont

$$(28)\quad \begin{cases} (\mathrm{C}_1) & \mathrm{A}y^2+\mathrm{B}(z^2-t^2)+2\mathrm{D}zt=0, \\ (\mathrm{C}_2) & \mathrm{A}x^2+\mathrm{B}'(z^2-t^2)+2\mathrm{D}'zt=0, \end{cases}$$

après avoir posé

$$(29)\quad \begin{cases} \mathrm{A}=a-a_1, \quad \mathrm{B}=b-b_1, \quad \mathrm{D}=d-d_1; \\ \mathrm{B}'=ab_1-a_1b, \quad \mathrm{D}'=ad_1-a_1d. \end{cases}$$

Les équations des deux cônes (28) peuvent s'écrire, en décomposant en carrés,

$$(30)\quad \begin{cases} \mathrm{AB}y^2+(\mathrm{B}z+\mathrm{D}t)^2-(\mathrm{B}^2+\mathrm{D}^2)t^2=0, \\ \mathrm{AB}'y^2+(\mathrm{B}'z+\mathrm{D}'t)^2-(\mathrm{B}'^2+\mathrm{D}'^2)t^2=0; \end{cases}$$

on voit, par là, que *les deux cônes dont les sommets sont réels sont toujours réels.*

12. Nous allons maintenant constater que *la courbe d'intersection des deux surfaces* S *et* T *est toujours réelle.*

Nous pouvons, en effet, construire cette courbe à l'aide des deux cônes réels ayant leurs sommets en A et B, ou, ce qui revient au même, en cherchant les intersections des deux surfaces avec un plan quelconque passant par AB. Soit

$$(31) \qquad t = \alpha z$$

l'équation de ce plan; remplaçons t par cette valeur dans les équations (19), il vient

$$(32) \qquad \begin{cases} x^2 + ay^2 + [b(1-\alpha^2) + 2d\alpha]z^2 = 0, \\ x^2 + a_1y^2 + [b_1(1-\alpha^2) + 2d_1\alpha]z^2 = 0 : \end{cases}$$

ce sont les équations de deux cônes ayant leur sommet en D.

On peut assimiler les équations (32) à celles de deux coniques, et l'équation en μ qui correspond au système des sécantes communes est

$$(1+\mu)(1+\mu a_1)][(b+\mu b_1)(1-\alpha^2) + 2\alpha(d+\mu d_1)] = 0;$$

les deux racines de cette équation sont réelles, quel que soit α, les deux cônes (32) se coupent donc suivant quatre génératrices réelles ou quatre génératrices imaginaires; ainsi, un plan quelconque passant par AB rencontre la courbe d'intersection des deux surfaces ou en quatre points réels ou en quatre points imaginaires.

Cette remarque faite en passant, revenons aux équations (32) : en les résolvant par rapport à x^2 et y^2, et en ayant égard aux notations (29), on trouve

$$(33) \qquad \begin{cases} Ay^2 + [B(1-\alpha^2) + 2D\alpha]z^2 = 0, \\ Ax^2 + [B'(1-\alpha^2) + 2D'\alpha]z^2 = 0. \end{cases}$$

Or nous pouvons admettre que l'on ait, par exemple,

$$(34) \qquad \frac{D}{B} > \frac{D'}{B'};$$

et alors, si nous posons

$$(35)\quad \begin{cases} h = \dfrac{D}{B} - \sqrt{1 + \dfrac{D^2}{B^2}}, & h' = \dfrac{D'}{B'} - \sqrt{1 + \dfrac{D'^2}{B'^2}}, \\ k = \dfrac{D}{B} + \sqrt{1 + \dfrac{D^2}{B^2}}, & k' = \dfrac{D'}{B'} + \sqrt{1 + \dfrac{D'^2}{B'^2}}, \end{cases}$$

on vérifie, sans difficulté, qu'on a toujours la série d'inégalités

$$(36)\qquad h' < h < k' < k.$$

D'ailleurs les équations (33) peuvent s'écrire

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{A}{B} y^2 - (\alpha - h)(\alpha - k) z^2 = 0, \\ \dfrac{A}{B'} x^2 - (\alpha - h')(\alpha - k') z^2 = 0. \end{cases}$$

D'après cela, il est facile de constater qu'on pourra toujours choisir pour α des valeurs telles que les valeurs de x^2 et de y^2 fournies par les équations (37) soient réelles; en effet :

Si $\dfrac{A}{B} > 0$ et $\dfrac{A}{B'} > 0$, on prendra pour α des valeurs inférieures à h' ou des valeurs supérieures à k;

Si $\dfrac{A}{B} > 0$ et $\dfrac{A}{B'} < 0$, on prendra pour α des valeurs comprises entre h' et h;

Si $\dfrac{A}{B} < 0$ et $\dfrac{A}{B'} < 0$, on prendra pour α des valeurs comprises entre h et k';

Si $\dfrac{A}{B} < 0$ et $\dfrac{A}{B'} > 0$, on prendra pour α des valeurs comprises entre k' et k.

Ainsi la courbe d'intersection des deux surfaces est toujours réelle, car l'hypothèse $\frac{D'}{B'} < \frac{D}{B}$ donnerait lieu à une discussion tout à fait semblable.

Remarque. — On ne peut pas admettre que les limites h, k, h', k' deviennent égales ; car si l'on avait, par exemple, $h' = h$, il en résulterait

$$\frac{D}{B} = \frac{D'}{B'}, \quad \text{ou} \quad (bd_1 - b_1 d)(a_1 - a) = 0;$$

mais alors l'équation en λ (27) aurait deux racines égales, ce qui est contraire à l'hypothèse.

§ III. — *L'équation en λ a ses quatre racines imaginaires.*

13. *Lorsque l'équation en λ a ses quatre racines imaginaires, les quatre cônes sont imaginaires ; la courbe d'intersection des deux surfaces est réelle.*

D'abord les quatre cônes sont imaginaires, car la démonstration du n° 8 est applicable au cas actuel. Les sommets des quatre cônes forment deux couples de points imaginaires conjugués : soient C_1, C_2 les deux premiers, C_3, C_4 les deux autres, les droites $C_1 C_2$ et $C_3 C_4$ sont réelles. Nous obtiendrons tous les points de la courbe par les intersections d'un plan quelconque passant par la droite $C_1 C_2$, par exemple, avec les deux cônes imaginaires ayant leurs sommets en C_1 et C_2. Or ce plan réel coupera le premier cône suivant deux droites imaginaires non conjuguées, et il coupera le second cône suivant deux droites imaginaires respectivement conjuguées des deux premières : ces quatre droites se couperont en deux points réels, et deux seulement. La courbe d'intersection des deux surfaces est donc réelle, et un plan quelconque passant par $C_1 C_2$ ou $C_3 C_4$ ne rencontre cette courbe qu'en deux points réels.

Cette proposition peut encore se démontrer comme il suit.

Prenons pour tétraèdre de référence un tétraèdre ayant deux de ses sommets sur la droite réelle $C_1 C_2$, et les deux autres sur la droite réelle $C_3 C_4$. C'est ce que nous ferons en exprimant que le plan polaire d'un point quelconque de la droite $C_1 C_2$ passe par la droite $C_3 C_4$, et inversement n° 2. A l'aide d'un calcul semblable à celui qui a été fait au n° 9, on trouve que les équations des deux surfaces se ramènent à la forme

$$(38)\ \begin{cases} (S) & ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 + 2exy + 2fzt = 0, \\ (T) & a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 + d_1t^2 + 2e_1xy + 2f_1zt = 0. \end{cases}$$

Les sommets des cônes situés sur CD sont imaginaires conjugués; laissant fixes les sommets A et B du tétraèdre de référence, nous pourrons déplacer les sommets C et D sur la droite CD de manière que, n^{os} 9 et 10, $d + c = 0$, $d_1 + c_1 = 0$; les équations des deux surfaces se réduiront alors à

$$ax^2 + by^2 + c(z^2 - t^2) + 2exy + 2fzt = 0,$$
$$a_1x^2 + b_1y^2 + c_1(z^2 - t^2) + 2e_1xy + 2f_1zt = 0.$$

De même, laissant fixes les nouveaux sommets C′ et D′ du tétraèdre de référence, nous pourrons déplacer les sommets A et B sur la droite AB de manière que $a + b = 0$, $a_1 + b_1 = 0$.

Donc, en définitive, *les équations des deux surfaces pourront toujours se ramener à la forme*

$$(39)\ \begin{cases} (S) & a(x^2 - y^2) + c(z^2 - t^2) + 2bxy + 2dzt = 0, \\ (T) & a_1(x^2 - y^2) + c_1(z^2 - t^2) + 2b_1xy + 2d_1zt = 0, \end{cases}$$

a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 étant des coefficients réels.

La courbe d'intersection des deux surfaces peut se construire à l'aide de plans passant par AB, soit

$$(40)\qquad t = \alpha z$$

l'équation d'un de ces plans; si l'on substitue cette valeur dans les équations (39) des deux surfaces, il vient

$$(41)\quad \begin{cases} a\,(x^2 - y^2) + 2bxy + [c\,(1-\alpha^2) + 2d\alpha]\,z^2 = 0, \\ a_1\,(x^2 - y^2) + 2b_1xy + [c_1(1-\alpha^2) + 2d_1\alpha]\,z^2 = 0; \end{cases}$$

ce sont les équations de deux cônes ayant leurs sommets en D. Assimilant ces équations à celles de deux coniques, l'équation en μ qui détermine les sécantes communes est

$$(42)\quad \begin{vmatrix} a+\mu a_1 & b+\mu b_1 & 0 \\ b+\mu b_1 & -(a+\mu a_1) & 0 \\ 0 & 0 & (c+\mu c_1)(1-\alpha^2)+2\alpha(d+\mu d_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Or, quel que soit α, deux des racines de cette dernière équation sont toujours imaginaires; donc, les deux coniques (ou les deux cônes) se coupent, quel que soit α, suivant deux génératrices réelles. Ainsi la courbe d'intersection des deux surfaces est toujours réelle.

(*La suite prochainement.*)