NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GIGON

Exercice sur l'emploi des coordonnées polaires

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 471-475

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__471_1>

EXERCICE SUR L'EMPLOI DES COORDONNÉES POLAIRES;

PAR M. GIGON,
Ancien élève de l'École Polytechnique, Professeur de Mathématiques.

PROBLÈME. — *Un angle constant tourne autour du foyer d'une conique; au point où les côtés de l'angle rencontrent la courbe, on mène des tangentes à cette courbe. Trouver le lieu des points d'intersection de ces tangentes.*

Solution. — La conique donnée, rapportée à son foyer comme pôle, et à son axe focal comme axe polaire, a pour équation

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1 - e\cos\omega}{p}.$$

On sait que, lorsque $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$ représente l'équation d'une courbe, la tangente à cette courbe en un point pour lequel $\omega = a$ est donnée par l'équation

$$\frac{1}{\rho} = f(a)\cos(\omega - a) + f'(a)\sin(\omega - a).$$

(DE COMBEROUSSE, *Cours de Mathématiques*, t. III, p. 265.)

Dans le cas actuel, la tangente à la courbe (1) en un point A situé sur le rayon vecteur $\omega = a$ est donnée par

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}\cos(\omega - a) - \frac{e}{p}\cos\omega;$$

et la tangente en un point B situé sur la courbe et le rayon vecteur $\omega = b$, par

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}\cos(\omega - b) - \frac{e}{p}\cos\omega.$$

La condition posée dans l'énoncé du problème est la suivante :

$$(4) \qquad b - a = \text{const.} = \text{K}.$$

Un point quelconque du lieu est donné par l'intersection des droites (2) et (3), dans lesquelles les paramètres a et b sont liés par la relation (4); en éliminant a et b entre ces trois équations, on aura l'équation du lieu.

On met (2) et (3) sous la forme

$$(2\ bis) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{e}{p}\cos\omega = \frac{1}{p}\cos(\omega - a),$$

$$(3\ bis) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{e}{p}\cos\omega = \frac{1}{p}\cos(\omega - b);$$

il s'ensuit $\cos(\omega - a) = \cos(\omega - b)$, c'est-à-dire

$$(5) \qquad \omega - a = 2n\pi \pm (\omega - b);$$

mais l'angle K est supposé < 180 degrés, et $b - a = \mathrm{K}$; on ne peut donc avoir ni $b = a$, ni $b = a + 2n\pi$; on doit prendre le signe — dans le second membre de (5), et poser

$$(6) \qquad 2\omega = a + b + 2n\pi.$$

Multiplions (2 *bis*) par (3 *bis*), transformons en somme de cosinus le produit des seconds membres, il vient, vu (6),

$$\left(\frac{1}{\rho} + \frac{e}{p}\cos\omega\right)^2 = \frac{1}{2p^2}\left\{\cos[2\omega - (a+b)] + \cos(b-a)\right\}$$
$$= \frac{1}{2p^2}(1 + \cos\mathrm{K}) = \frac{1}{p^2}\cos^2\frac{\mathrm{K}}{2},$$

et, en extrayant la racine,

$$\frac{1}{\rho} + \frac{e}{p}\cos\omega = \pm\frac{1}{p}\cos\frac{\mathrm{K}}{2};$$

et, par suite, le lieu est représenté par

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1 - \left(\dfrac{e}{\cos\frac{\mathrm{K}}{2}}\right)\cos\omega}{\left(\dfrac{p}{\cos\frac{\mathrm{K}}{2}}\right)}$$

et par

$$(7\ bis) \qquad \frac{1}{\rho} = -\frac{1 + \left(\dfrac{e}{\cos\frac{\mathrm{K}}{2}}\right)\cos\omega}{\left(\dfrac{p}{\cos\frac{\mathrm{K}}{2}}\right)}.$$

Discussion. — On remarque que les deux équations (7) et (7 *bis*) ne sont pas distinctes l'une de l'autre ; car on passe de la première à la seconde, en changeant ρ en $-\rho$, et ω en $\pi+\omega$; elles représentent donc la même courbe, et il suffit de discuter l'une d'elles, (7) par exemple.

La courbe représentée par (7) est une conique homofocale à la proposée (1) ; son excentricité $e' = \dfrac{e}{\cos\frac{K}{2}}$, et son paramètre $p' = \dfrac{p}{\cos\frac{K}{2}}$.

Si la conique proposée est une hyperbole ($e > 1$), la conique (7) est toujours une hyperbole, facile à construire.

Si la proposée est une parabole ($e = 1$), le lieu (7) est toujours une hyperbole, excepté dans le cas singulier où $\cos\frac{K}{2} = \pm 1$, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$K = 0 \quad \text{ou} \quad K = 360 \text{ degrés};$$

on trouve alors, pour le lieu, une parabole qui se confond avec la proposée (1), ce qui devait être.

Si la proposée (1) est une ellipse ($e < 1$), le lieu (7), suivant qu'on a $e' < 1$, $e' > 1$, ou $e' = 1$, est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, ce qui revient aux conditions suivantes :

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \textit{Ellipse,} & \text{si} & \cos\frac{K}{2} > \frac{c}{a}; \\ \textit{Hyperbole,} & \text{si} & \cos\frac{K}{2} < \frac{c}{a}; \\ \textit{Parabole,} & \text{si} & \cos\frac{K}{2} = \frac{c}{a}. \end{array}\right.$$

Si l'on joint par deux droites le foyer pris pour origine aux deux sommets de la proposée, situés sur son petit axe, et qu'on appelle α l'angle de ces deux droites, on trouve

$$\tang \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{c}, \quad \text{ou} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{c}{a}.$$

Or, l'angle K étant supposé toujours $<$ 180 degrés, les conditions (8) font savoir que le lieu (7) sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'angle donné K sera plus petit que l'angle α, ou plus grand, ou lui sera égal.

En effet, cet angle α est l'angle minimum de tous les angles β sous lesquels on voit du foyer les différents diamètres de l'ellipse ; les angles β varient depuis α jusqu'à 180 degrés ; si donc l'angle donné K est plus petit que α, la corde AB d'intersection des côtés de cet angle avec l'ellipse ne sera jamais un diamètre, et les deux tangentes à la courbe en A et en B ne pourront pas être parallèles ; par suite, il n'y aura pas de point du lieu situé à l'infini, et la conique (7) sera fermée.

Si l'angle K est égal à α, il y aura une position, et une seule, où la corde AB sera un diamètre de la proposée (1) ; ce cas se présentera quand AB se confondra avec le petit axe ; alors le lieu (7) est une parabole aisée à construire.

Si l'angle K est plus grand que α, on trouvera deux directions asymptotiques symétriques par rapport à l'axe polaire ; le lieu est alors une hyperbole dont la construction n'offre aucune difficulté.