

GIGON

Questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 7
(1868), p. 462-471

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__462_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1868, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS DE LICENCE ;

PAR M. GIGON,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Professeur de Mathématiques.

EXERCICES SUR LES ROULETTES EXTÉRIEURES ET INTÉRIEURES DANS LES COURBES PLANES.

Définitions. — On dit qu'une courbe mobile G (*fig. 1*) roule *extérieurement*, à un instant donné, sur une courbe fixe F , quand le point de contact I , centre instantané de

la rotation, se trouve placé entre les points O et C, centres de courbure des deux courbes.

FIG. 1.

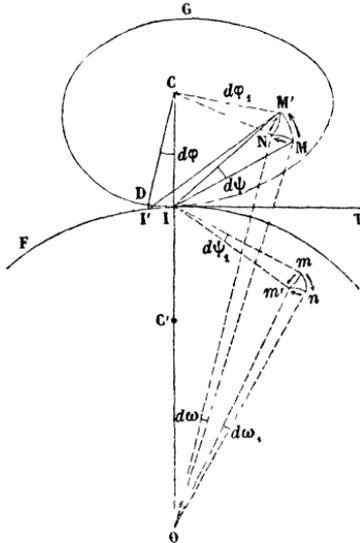


FIG. 2.

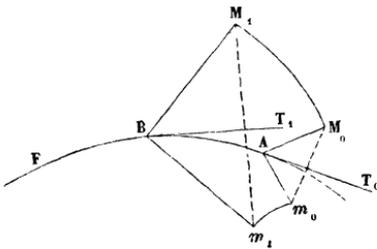
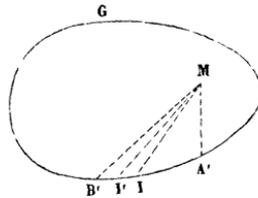


FIG. 3.



On dit qu'une courbe mobile roule *intérieurement* sur une courbe fixe quand le centre de courbure C' de la courbe mobile est situé entre le centre de courbure O de la courbe fixe et le point I, centre instantané de la rotation (fig. 1).

Dans un mouvement fini, les courbes G et F restent toujours tangentes l'une et l'autre, les différents points d'un arc A'B' de G (*fig. 3*, p. 463) viennent successivement coïncider avec les points correspondants d'un arc égal AB de la courbe fixe (*fig. 2*, p. 463); dans le roulement *extérieur* un point M invariablement lié à la courbe mobile décrit une *roulette extérieure* MM', et dans le roulement *intérieur* le même point M décrit une *roulette intérieure* mm'.

Pour déterminer ces deux roulettes, on peut à chaque instant remplacer F et G par leurs cercles de courbure, qu'on suppose animés d'une rotation infiniment petite autour du point de contact.

Les courbes F et G que nous considérons sont quelconques et même non définies géométriquement. Nous supposons que leurs courbures ne présentent pas de discontinuité.

THÉORÈME. — *Si l'on fait rouler extérieurement d'abord, intérieurement ensuite, un arc donné quelconque A'B' de la courbe mobile sur un arc égal AB de la courbe fixe, la somme des arcs MM' et mm' décrits dans ces deux mouvements par un point quelconque M du plan de la courbe mobile est indépendante de la nature de la courbe fixe (fig. 1, 2, 3, p. 463).*

Soient :

R, le rayon de courbure OI ;

r, le rayon de courbure CI ;

II', le déplacement infiniment petit du centre instantané de rotation à la fin des deux rotations élémentaires, l'une intérieure, l'autre extérieure, que nous considérons ;

\widehat{ICI} , l'angle élémentaire $d\varphi$ pris pour infiniment petit principal ;

MM' et mm', les arcs élémentaires des deux roulettes, extérieure et intérieure.

La rotation élémentaire *extérieure* est une rotation de la courbe mobile G autour d'un axe passant en I, et perpendiculaire à son plan. D'après le théorème de Poinso, nous la décomposons en deux rotations autour d'axes parallèles au premier, et passant, l'un en O, l'autre en C; ce qui revient à faire décrire au point M, au lieu de l'arc de cercle MM' de centre I, les arcs MN de centre O et NM' de centre C. En appelant dt l'élément du temps, les vitesses angulaires de ces diverses rotations sont

$$\text{Autour du point I : } \Psi = \frac{d\psi}{dt},$$

$$\text{Autour du point O : } \Omega = \frac{d\omega}{dt},$$

$$\text{Autour du point C : } \Phi = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Elles se composent entre elles comme des forces parallèles et de même sens, et l'on a

$$\frac{\Phi}{R} = \frac{\Omega}{r} = \frac{\Psi}{R+r};$$

ces relations, si l'on y remplace les vitesses par les angles élémentaires qui leur sont proportionnels, peuvent s'écrire comme il suit :

$$(1) \quad \frac{d\varphi}{R} = \frac{d\omega}{r} = \frac{d\psi}{R+r}.$$

Décomposons de même la rotation élémentaire *intérieure* en deux autres, l'une autour d'un axe passant en O, et l'autre autour d'un axe passant en un point C' tel que IC' = IC; remarquons que les rotations en C' et en I

sont de même sens, et que la rotation en O est de sens contraire; les vitesses angulaires de ces diverses rotations sont :

$$\text{Autour du point I : } \Psi_1 = \frac{d\psi_1}{dt},$$

$$\text{Autour du point O : } \Omega_1 = \frac{d\omega_1}{dt},$$

$$\text{Autour du point C' : } \Phi = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Elles se composent comme des forces parallèles et de sens contraires, et l'on a

$$(2) \quad \frac{d\varphi}{R} = \frac{d\omega_1}{r} = \frac{d\psi_1}{R-r}.$$

En comparant les équations (1) et (2), on voit que $d\omega_1 = d\omega$, et, par suite, il vient

$$(3) \quad \frac{d\varphi}{R} = \frac{d\omega}{r} = \frac{d\psi_1}{R-r}.$$

Cela posé, désignons par ρ le rayon vecteur $MI = mI$, et calculons les arcs élémentaires ds et ds_1 des roulettes extérieure et intérieure.

En vertu des équations (1) et (3), on trouve

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{arc } MM' = ds = \rho d\psi = \rho(d\varphi + d\omega) = \rho d\varphi \left(\frac{R+r}{R} \right); \\ \text{arc } mm' = ds_1 = \rho d\psi_1 = \rho(d\varphi - d\omega) = \rho d\varphi \left(\frac{R-r}{R} \right); \end{array} \right.$$

et, si l'on ajoute les deux équations (4), il vient

$$(5) \quad ds + ds_1 = 2\rho d\varphi.$$

Les valeurs de ρ et de $d\varphi$ dépendent de la nature de la courbe mobile, mais nullement de la courbe fixe. Le théo-

rème énoncé est donc vrai pour des arcs élémentaires ; mais il est également vrai pour des arcs finis quelconques.

En effet, prenons deux limites quelconques de φ , φ_0 et φ_1 ; l'on aura (*fig. 2*, p. 463)

$$\text{arc } M_0 M_1 = S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} ds,$$

$$\text{arc } m_0 m_1 = S_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} ds_1.$$

En effectuant, entre les limites φ_0 et φ_1 , l'intégration de l'expression (5), il vient

$$(6) \quad S + S_1 = 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho d\varphi.$$

Le second membre de l'équation (6) est indépendant de la nature de la courbe fixe, et le théorème est démontré.

THÉORÈME. — *Si l'on fait rouler extérieurement d'abord, intérieurement ensuite, un arc donné quelconque A'B' de la courbe mobile sur un arc égal AB de la courbe fixe, la somme des surfaces décrites dans ces deux mouvements par le rayon vecteur qui joint, à chaque instant, le point décrivant au centre instantané de rotation est indépendante de la nature de la courbe fixe.*

L'aire élémentaire $da = IMM'I'$ décrite dans la rotation *extérieure* se compose de deux parties, le secteur de cercle IMM' et le triangle $IM'I'$ (*fig. 1*, p. 463).

Or, le triangle $IM'I'$, à un infiniment petit du second ordre près, est égal à l'élément MID de la surface G compris entre l'arc $ID = II'$, et les rayons vecteurs MI et MD

issus du point décrivant; l'élément $MID = d\sigma$ dépend donc uniquement de la nature de la courbe mobile.

De même, l'aire élémentaire $da_1 = Imm_1 I'$ décrite dans la rotation intérieure se compose de deux parties $ImI' = d\sigma$, et du secteur de cercle Imm' .

On trouve donc, d'après ce qui vient d'être dit, et en tenant compte des équations (1) et (3),

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} da = d\sigma + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{R+r}{R} \right) d\varphi, \\ da_1 = d\sigma + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{R-r}{R} \right) d\varphi; \end{array} \right.$$

et, par suite, il vient

$$(8) \quad da + da_1 = 2d\sigma + \rho^2 d\varphi.$$

Le théorème énoncé est donc vrai pour des surfaces élémentaires, mais il est également vrai pour des surfaces finies.

En effet, prenons deux limites quelconques de φ , φ_0 et φ_1 , et l'on aura

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\sigma = \text{surface } A'MB' \quad (\text{fig. 3, p. 463}), \\ \left. \begin{array}{l} A = \text{surface } AM_0 M_1 BA \\ A_1 = \text{surface } Am_0 m_1 BA \end{array} \right\} & (\text{fig. 2, p. 463}). \end{aligned}$$

En effectuant entre les limites φ_0 et φ_1 l'intégration de l'expression (8), il vient

$$(9) \quad A + A_1 = 2\Sigma + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho^2 d\varphi.$$

Le second membre de l'équation (9) est indépendant de la nature de la courbe fixe, et le théorème est démontré.

Remarque. — Ces deux propositions remarquables sont dues à M. Hennig; mais la démonstration qui précède est différente de celle que cet auteur a publiée (*Journal de Crelle*, année 1865).

Rectification et quadrature des roulettes. — Puisque les sommes $S + S_1$ et $A + A_1$ sont indépendantes de la nature de la courbe fixe, on pourra les obtenir en faisant rouler la courbe mobile donnée sur une courbe fixe convenablement choisie, qui sera par exemple une droite, ou bien une courbe identique à la courbe mobile.

On évaluera directement la surface Σ de la formule (9).

Si maintenant, on peut trouver, par un procédé quelconque, les rapports $\frac{S}{S_1}$, $\frac{A}{A_1}$, on en déduira les valeurs de A , A_1 , S , S_1 , qui dépendent, comme on sait, à la fois, de la courbe fixe et de la courbe mobile.

Première application. — La courbe mobile est un cercle de rayon r . Quand on le fait rouler sur une droite, un point M de son plan décrit une cycloïde, soit ordinaire, soit allongée ou raccourcie, suivant la position du point M . Or, on connaît l'arc et la surface de ces courbes (voir un article de M. Dieu, *Nouvelles Annales*, t. XI). Il est facile en outre d'évaluer Σ .

Si maintenant on fait rouler le cercle r extérieurement, et intérieurement, sur un cercle de rayon R , le point M décrira une épicycloïde et une hypocycloïde qui seront, soit ordinaires, soit allongées ou raccourcies, suivant la position du point décrivant dans le cercle générateur.

Or, dans le cas actuel, les rapports $\frac{S}{S_1}$ et $\frac{A - \Sigma}{A_1 - \Sigma}$ sont constants et égaux à $\frac{R + r}{R - r}$.

On trouvera donc les arcs et les surfaces de toutes ces

roulettes, au moyen de l'arc et de la surface des cycloïdes. Nous laissons au lecteur le soin de faire ces calculs.

En particulier, on sait que la longueur d'une branche de cycloïde ordinaire est égale à 8 fois le rayon r du cercle générateur, et que sa surface est le triple de celle du même cercle. Donc les longueurs d'une branche d'épicycloïde et d'hypocycloïde ordinaires seront respectivement

$$S = \frac{8r(R+r)}{R}, \quad S_1 = \frac{8r(R-r)}{R}.$$

Si $r = \frac{R}{2}$, d'après le théorème de Cardan, l'hypocycloïde devient le diamètre du cercle fixe, ce que l'on vérifie aisément ; car l'on a, dans ce cas,

$$S_1 = \frac{4R \left(R - \frac{R}{2} \right)}{R} = 2R = 4r;$$

et de même

$$S = 6R = 12r.$$

Deuxième application. — Si l'on fait rouler la courbe mobile sur une courbe identique à elle-même, en sorte que ces deux courbes soient à chaque instant symétriques l'une de l'autre par rapport à la tangente commune, on sait que la roulette extérieure décrite par un point M sera l'homothétique double de la podaire du point M par rapport à la courbe à laquelle il est lié. La roulette intérieure se réduit à un point.

Or, la podaire d'un cercle pour un point quelconque de son plan est un limaçon de Pascal.

Les rectifications et les quadratures de toutes les cycloïdes, épicycloïdes et hypocycloïdes se ramèneront donc à la rectification et à la quadrature du limaçon de Pascal.

On démontrera ainsi sans peine les théorèmes suivants :

I. L'arc de cycloïde ordinaire, allongée ou raccourcie, décrit par un point situé à une distance d du centre du cercle générateur de rayon r et correspondant à une rotation $\varphi_1 - \varphi_0$ dudit cercle, est égal à l'arc compris entre les deux rayons vecteurs φ_1 et φ_0 du limaçon de Pascal, dont l'équation polaire est

$$\rho = r - d \cos \varphi.$$

II. Dans les cycloïdes susdésignées, les surfaces comprises entre deux points de la courbe (φ_1 et φ_0), les ordonnées de ces points et l'axe des x , sont égales au double du secteur correspondant du limaçon de Pascal

$$\rho = r - d \cos \varphi,$$

secteur compris entre la courbe et les rayons vecteurs φ_1 et φ_0 .