NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 440-453

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__440_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 61

(voir 1re série, t. II, p. 48),

PAR M. G. BATTAGLINI.

Deux pyramides convexes qui ont les faces triangulaires égales chacune à chacune et semblablement disposées sont égales. (CATALAN.)

M. Battaglini énonce le théorème sous la forme suivante : *Deux pyramides sont égales lorsqu'elles ont leurs arêtes respectivement égales et semblablement placées.*

Voici comment il le démontre.

Abaissons les hauteurs SO, S'O' (*) ; si nous admettons qu'elles sont égales, toutes les lignes AO, BO,...,

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

KO, LO,... seront respectivement égales à leurs correspondantes dans l'autre pyramide; les triangles ayant leurs sommets en O seront par conséquent égaux aux triangles ayant leurs sommets en O′; donc les deux pyramide seront égales, car on pourra les superposer. Donc tout revient à prouver l'égalité des deux hauteurs.

Admettons que les hauteurs diffèrent et posons

$$\overline{SO}^2 = \overline{S'O'}^2 + m^2,$$

m étant une certaine ligne; portons cette ligne à partir de O sur la hauteur OS, et soit

$$OM = m.$$

En nommant A, B...K, L les divers sommets de la première base, et A′, B′...K′, L′ les sommets homologues de la seconde, nous avons, d'après nos diverses hypothèses,

$$\overline{SA}^2 = \overline{S'A'}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{AO}^2 = \overline{S'O'}^2 + \overline{A'O'}^2,$$

donc

$$\begin{aligned} m^2 = \overline{SO}^2 - \overline{S'O'}^2 &= \overline{A'O'}^2 - \overline{AO}^2, \\ &= \overline{B'O'}^2 - \overline{BO}^2, \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \overline{K'O'}^2 - \overline{KO}^2, \\ &= \overline{L'O'}^2 - \overline{LO}^2; \end{aligned}$$

mais on a aussi

$$\begin{aligned} \overline{AM}^2 &= \overline{AO}^2 + m^2 = \overline{A'O'}^2, \\ \overline{BM}^2 &= \overline{BO}^2 + m^2 = \overline{B'O'}^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} AM &= A'O', \\ BM &= B'O', \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\mathrm{KM} = \mathrm{K'O'},$$
$$\mathrm{LM} = \mathrm{L'O'}.$$

Par conséquent les triangles ayant leurs sommets en M sont respectivement égaux aux triangles ayant leurs sommets en O′, ce qui est absurde, puisque autour de O′ les triangles sont dans un même plan, tandis que autour de M ils forment un angle solide.

Cette absurdité cesse si M se confond avec le point O, et alors $m = 0$, donc

$$\mathrm{SO} = \mathrm{S'O'}.$$

Question 342

(voir tome XV, page 353);

PAR M. BAUQUENNE.

ABC est un triangle inscrit dans le triangle abc, A est sur bc, B sur ac, C sur ab; trois courbes sont données dans le même plan; AB touche une courbe en γ, AC touche une deuxième courbe en β et BC la troisième courbe en α: on a, pour toute position du triangle ABC,

$$\frac{\mathrm{A}\gamma.\mathrm{B}\alpha.\mathrm{C}\beta}{\mathrm{A}\beta.\mathrm{B}\gamma.\mathrm{C}\alpha} = \frac{a\mathrm{C}.b\mathrm{A}.c\mathrm{B}}{a\mathrm{B}.b\mathrm{C}.c\mathrm{A}} \qquad (\text{Möbius}).$$

Soient O le point de contact d'une droite mobile avec son enveloppe, M et M′ ses points de rencontre avec deux courbes données, MA et M′A les tangentes à ces courbes; en considérant la position infiniment voisine de la droite mobile comme une transversale coupant les trois côtés du triangle AMM′, on a

$$\mathrm{OM'}.\mathrm{AM'}.ds = \mathrm{OM}.\mathrm{AM}.ds',$$

ds et ds' étant les arcs décrits par les points M et M′ (BOUR, *Cinématique*, p. 58). Écrivons que cette relation a lieu pour chacun des côtés du triangle ABC, nous aurons

$$\begin{aligned} B\gamma.cB.ds &= A\gamma.cA.ds', \\ C\alpha.aC.ds' &= B\alpha.aB.ds'', \\ A\beta.bA.ds'' &= C\beta.bC.ds, \end{aligned}$$

et, en multipliant membre à membre,

$$A\beta.B\gamma.C\alpha.aC.bA.cB = A\gamma.B\alpha.C\beta.aB.bC.cA,$$

ou

$$\frac{A\gamma.B\alpha.C\beta}{A\beta.B\gamma.C\alpha} = \frac{aC.bA.cB}{aB.bC\ cA} \qquad \text{C. Q F. D.}$$

Question 711

(voir 2ᵉ serie, t. III, p. 443);

PAR M. LAISANT,
Officier du génie.

Les sommets d'un polygone étant aux points a, b, c, d,..., menons, par un point arbitraire o, des parallèles aux côtés de l'angle a, et désignons par A *la surface du parallélogramme ainsi construit. Soient* B, C, D,... *les surfaces des parallélogrammes déterminés de la même manière aux sommets b, c, d,.... Démontrer que le point o est le centre de gravité des poids* $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$,... *placés aux sommets a, b, c,....*

Il y a un théorème correspondant dans l'espace.

(H. FAURE.)

Considérons deux sommets consécutifs a, b; construisons les parallélogrammes indiqués et prolongeons, en les doublant, leurs côtés oa_1, oa_2, ob_1, ob_2 en $o\alpha_1$, $o\alpha_2$, $o6_1$, $o6_2$ (*). Il est clair que les points α_1, a, α_2 sont en ligne droite, et que $a\alpha_1 = a\alpha_2$. Donc on peut remplacer le poids $\frac{1}{A}$, placé en a, par deux poids $\frac{1}{2A}$ placés, l'un en α_1, l'autre en α_2. De même pour le poids $\frac{1}{B}$. Composons maintenant les poids $\frac{1}{2A}$, $\frac{1}{2B}$ appliqués en α_1 et 6_1 sur la droite $\alpha_1 6_1$ parallèle à ab. La résultante passera par le point o. En effet, on a

$$\frac{o\alpha_1}{o6_1} = \frac{oa_1}{ob_1} = \frac{A}{B} = \frac{\left(\frac{1}{B}\right)}{\left(\frac{1}{A}\right)},$$

puisque les parallélogrammes A, B, ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases oa_1, ob_1. Les compositions partielles analogues donneront des résultantes passant par le point o ; donc ce point est le centre de gravité du système.

Cette démonstration suppose que l'on considère comme positives les surfaces des parallélogrammes qui se forment au moyen des angles mêmes du polygone, et comme négatives les surfaces des parallélogrammes qui se forment au moyen des angles supplémentaires.

Note du Rédacteur. — En généralisant ce théorème, M Laisant établit la proposition suivante : *Les sommets d'un polyèdre étant aux points a, b, c,...; menons par un point arbitraire* O *des plans parallèles aux faces de*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure. Les côtés de l'angle a étant representés par ab, ac, les droites oa_1, oa_2 sont parallèles à ab, ac, et rencontrent ac, ab en a_1, a_2. Le parallélogramme A est oa_1aa_2. Les droites $o\alpha_1$, $o\alpha_2$ sont doubles de oa_1, oa_2. Les côtés de l'angle b étant représentés par ba, bd, les droites ob_1, ob_2 sont parallèles à ba, bd et rencontrent bd, ba en b_1, b_2. En outre $o6_2 = 2.ob_2$ et $o6_1 = 2.ob_1$.

l'angle solide a et désignons par A_1, A_2,... *les volumes des différents parallélipipèdes ainsi construits. Soient* B_1, B_2,..., C_1, C_2,..., *les volumes des parallélipipèdes déterminés de la même manière aux sommets* $b, c, \ldots$; *le point* O *sera le centre de gravité des poids* $\frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_2}, \ldots, \frac{1}{B_1}, \frac{1}{B_2}, \ldots, \frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_2}, \ldots,$ *placés aux sommets* $a, b, c \ldots$.

Question 836

(voir 2e série, t. VI, p. 526);

PAR M. LÉON BARBIER,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Strasbourg
(classe de M. Pruvost).

Soient deux surfaces du second ordre S *et* T, ABCD *le tétraèdre conjugué par rapport à ces deux surfaces, et* Γ *la courbe gauche d'intersection de* S *et* T. *Les plans polaires d'un point* P, *par rapport aux diverses surfaces du second ordre passant par la courbe* Γ, *tournent autour d'une droite* Δ; *les plans menés par la droite* Δ *et les sommets du tétraèdre* ABCD *forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant, quel que soit le point considéré* P.

Plus particulièrement, les plans menés par une tangente quelconque à la courbe gauche Γ *par les sommets du tétraèdre* ABCD *forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant.* (PAINVIN.)

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ les équations des faces du tétraèdre ABCD. Les surfaces S et T ont respectivement pour équations

$$S = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 = 0,$$
$$T = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 = 0.$$

Les plans polaires du point $P(\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1\, \delta_1)$ par rapport aux surfaces S et T ont pour équations

$$s = A\alpha_1\alpha + B\beta_1\beta + C\gamma_1\gamma + D\delta_1\delta = 0,$$
$$t = a\alpha_1\alpha + b\beta_1\beta + c\gamma_1\gamma + d\delta_1\delta = 0.$$

Maintenant l'équation

$$S + \lambda T = 0$$

représente une surface quelconque du second ordre passant par l'intersection des surfaces S et T, par suite

$$s + \lambda t = 0$$

représente le plan polaire du point P par rapport à cette surface; donc ce plan polaire passe par la droite fixe Δ, intersection des plans représentés par les équations $s = 0$, $t = 0$.

Les équations

$$s + K_0 t = 0,$$
$$s + K_1 t = 0,$$
$$s + K_2 t = 0,$$
$$s + K_3 t = 0$$

représentent quatre plans passant par la droite Δ. Ces plans passeront respectivement par les quatre sommets du tétraèdre, si l'on a les relations

$$A + K_0 a = 0,$$
$$B + K_1 b = 0,$$
$$C + K_2 c = 0,$$
$$D + K_3 d = 0.$$

Le rapport anharmonique des quatre plans déterminés par la droite Δ et les quatre sommets du tétraèdre est

$$\frac{K_0 - K_2}{K_1 - K_2} : \frac{K_0 - K_3}{K_1 - K_3} = \frac{-\frac{A}{a} + \frac{C}{c}}{-\frac{B}{b} + \frac{C}{c}} : \frac{-\frac{A}{a} + \frac{D}{d}}{-\frac{B}{b} + \frac{D}{d}},$$

quantité indépendante des coordonnées du point P.

Si le point P est sur la courbe Γ, la droite Δ est la tangente en ce point à la courbe. Le cas particulier de l'énoncé est ainsi établi.

Note. — M. Joanne a résolu la même question à peu près de la même manière.

Question 840

(voir 2e série, t. VII, p. 44);

PAR M. MORGES,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Darboux).

On donne un cercle et un point O *fixe sur la circonférence, par ce point on mène une corde arbitraire* OM, *sur la direction de laquelle on porte une longueur* OP *telle, que* $\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 +$ const.; *par le point* P *on mène une perpendiculaire à* OP, *trouver l'enveloppe de cette perpendiculaire.* (DUPAIN.)

La relation

$$\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \text{const.}$$

peut s'écrire

$$(OP - OM)(OP + OM) = \text{const.},$$

ou bien

$$PM(PM + 2OM) = \text{const.}$$

Menons le diamètre du point O, soit OF (*); et de l'extrémité F abaissons une perpendiculaire sur la ligne dont nous cherchons l'enveloppe, soit FH, nous voyons que FH = PM. D'un autre côté, si sur le prolongement de FO nous prenons OF′ = FO, et si du point F′ nous abaissons sur PH une perpendiculaire F′H′, nous aurons en-

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

core

$$PM + 2OM = F'H';$$

donc la relation donnée équivaut à

$$FH \times F'H' = \text{const.}$$

Donc, d'après un théorème connu, la droite HH′ enveloppe une ellipse ou une hyperbole suivant le signe de la constante; F, F′ sont les foyers de cette conique, et O est son centre. La constante représente le carré du petit axe, ou le carré de l'axe imaginaire.

Note. — On peut remarquer, avec M. Laisant, que

$$\overline{OH}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MF}^2 = \overline{OF}^2 + \text{const.} = \text{const.}$$

Donc le lieu des points H est un cercle de centre O; donc la podaire de l'enveloppe cherchée est circulaire, si l'on prend le point F comme pôle; donc cette enveloppe est bien une ellipse ou une hyperbole.

Ont résolu la même question : MM. Laisant, capitaine du génie; Georges de Villepin, du collége Stanislas (classe de M. Gros); Arthur Millasseau, du lycée de Douai (classe de M. Painvin); Caron et Floquet, du lycée de Nancy (classe de M. Vaille); A. Collin, maitré répétiteur au lycée de Mâcon; Paul Vasseur, du lycée d'Amiens; E. Lattes et G. Lecœur, du lycée de Rouen (classe de M. Vincent); Kaher Bey; Jouanne; Léon Arnoye, du lycée Charlemagne; Auguste Clair, du lycée de Dijon (classe de M. Marguet); A. Romieux, du lycée Saint-Louis; Julien Boulanger, du lycée de Dijon; A. Hilaire; G. Herment et Julien Welsch, du lycée de Metz (classe de M. Ribout).

La plupart de ces solutions consistent dans la détermination directe de l'enveloppe par le calcul.

Question 856

(voir 2e serie, t VII, p 189);

PAR M. ALFRED GIARD.

Soient M *et* M_1 *deux points d'une ellipse tels, que les produits des coefficients angulaires des diamètres passant par ces points soient* $-\frac{b^3}{a^3}$. *En nommant* ρ, ρ_1 *les rayons de courbure en ces points,* r, r_1 *les rayons de courbure de la développée aux points correspondants à ceux de l'ellipse, on a les deux relations*

$$\rho\rho_1 = ab, \quad \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^4 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^3.$$

(A. SARTIAUX.)

Nommons φ et φ_1 les paramètres angulaires des extrémités de deux diamètres, les coordonnées de ces points seront

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a\cos\varphi = am, \\ y = b\sin\varphi = bn; \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = a\cos\varphi_1 = am_1, \\ y_1 = b\sin\varphi_1 = bn_1, \end{cases}$$

en posant

$$\cos\varphi = m,$$

$$\sin\varphi = n,$$

pour abréger.

Les coefficients angulaires des diamètres sont liés, en vertu de l'énoncé, par la relation

$$\frac{n_1 n}{m_1 m} = -\frac{b}{a}.$$

D'un autre côté, les rayons de courbure aux points (1) et (2) sont

$$\rho = \frac{(a^2n^2 + b^2m^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \quad \rho_1 = \frac{(a^2n_1^2 + b^2m_1^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

donc

$$\rho\rho_1 = \frac{[a^4n^2n_1^2 + a^2b^2(n^2m_1^2 + m^2n_1^2) + b^4m^2m_1^2]^{\frac{3}{2}}}{a^2b^2},$$

mais

$$a^2n^2n_1^2 = b^2m^2m_1^2,$$

donc

$$\rho\rho_1 = ab\,(n^2n_1^2 + n^2m_1^2 + m^2n_1^2 + m^2m_1^2) = ab.$$

Les coordonnées des points de la développée correspondant aux points (1) et (2) de l'ellipse sont

$$(3) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{c^2}{a}\, m^3, \\ Y = -\dfrac{c^2}{b}\, n^3; \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{c^2}{a}\, m_1^3, \\ Y_1 = -\dfrac{c^2}{b}\, n_1^3. \end{cases}$$

En appliquant la formule connue du rayon de courbure

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

on trouve, pour les points (3) et (4) de la développée, après quelques réductions,

$$r = \frac{3c^2\rho mn}{ab}, \quad r_1 = \frac{3c^2\rho_1 m_1 n_1}{ab},$$

donc

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\rho_1}{\rho}\,\frac{m_1 n_1}{mn};$$

d'un autre côté

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2 = \frac{(a^2 n_1^2 + b^2 m_1^2)^3}{(a^2 n^2 + b^2 m^2)^3},$$

donc

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^4 = \left(\frac{m_1^4 n_1^4}{m^4 n^4}\right)^3 \quad \text{ou} \quad \frac{\rho_1}{\rho} = \left(\frac{m_1 n_1}{mn}\right)^3,$$

toutes réductions faites.

Donc enfin, en remplaçant dans l'égalité ci-dessus $\dfrac{m_1 n_1}{mn}$ par la valeur que donne cette dernière équation :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^4 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

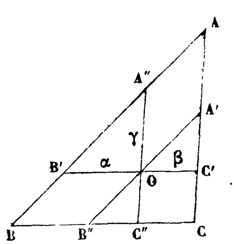
Note. — La question a été résolue de la même manière par MM. P. Willière, Kaher Bey, Jouanne. MM. Pierre Sondat, au collége d'Annecy, et M. Brocard, sous-lieutenant du génie, ont évité l'emploi de l'angle auxiliaire φ.

Question 863

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 191);

PAR M. ALBERT AUBANEL,
Élève de Mathématiques élémentaires au lycée de Nîmes.

Construire un triangle, connaissant les trois parallèles aux trois côtés qui passent par le centre du cercle inscrit. (LEMOINE.)



Le quadrilatère BB′OB″ est un losange.

En effet, ce quadrilatère est un parallélogramme dans lequel une diagonale BO est bissectrice de l'angle au sommet B correspondant. De même $AA'A''O$ est un losange, ainsi que $OC'CC''$.

Donc, parmi les six segments déterminés par le centre sur les trois parallèles, *trois seulement sont différents.*

Je désigne par α et β les deux segments comptés sur l'une des parallèles, et par γ le troisième segment; par m, m', m'' les longueurs données de ces parallèles.

On a

$$\alpha + \beta = m,$$
$$\alpha + \gamma = m',$$
$$\beta + \gamma = m'',$$

d'où l'on tire immédiatement la valeur de chaque segment α, β et γ.

On peut donc se donner l'une des parallèles et déterminer sur elle la position du centre O.

Dès lors le problème est bien facile à résoudre, car les deux triangles $A''OB'$, $A'OC'$ sont semblables et fournissent la relation suivante :

$$\frac{A''B'}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{A'C'},$$

d'où

$$A''B' = \frac{\gamma\alpha}{\beta}, \quad A'C' = \frac{\beta\gamma}{\alpha}.$$

On peut donc trouver la position des points A'' et A' par la construction des deux triangles $A''OB'$, $A'C'O$, et le triangle demandé est aussitôt déterminé.

Remarquons que l'on peut se poser une question analogue en se donnant le centre de l'un des cercles ex-inscrits. Les trois équations donnant α, β et γ deviennent

$$\alpha + \beta = m,$$
$$\beta - \alpha = m',$$
$$\beta - \gamma = m'',$$

et les deux triangles semblables subsistent toujours.

Note. — Ont resolu la question de la même manière : MM. Racine, eleve de Mathematiques elementaires au lycee de Poitiers; P. Willière; Gayou, eleve a l'École Normale superieure.