NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L.-V. TURQUAN

Remarques sur les solutions d'un problème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 437-440

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__437_1>

REMARQUES SUR LES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. L.-V. TURQUAN.

Carnot, dans sa *Géométrie de position*, rappelle plusieurs objections faites par d'Alembert à la théorie des quantités négatives, et il cite à l'appui la résolution du problème suivant :

« Du point K pris hors d'un cercle donné (*), soit proposé de mener une droite Kmm' telle, que la portion mm', interceptée dans le cercle, soit égale à une droite donnée.

» Du point K et par le centre du cercle, menons une droite KAB, qui rencontre la circonférence en A et B. Supposons

$$KA = a \quad \text{et} \quad KB = b, \quad mm' = c, \quad Km = x:$$

on aura, par les propriétés du cercle,

$$ab = x(c + x) = cx + x^2,$$

donc

$$x^2 + cx - ab = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}.$$

» x a donc deux valeurs : la première, qui est positive, satisfait sans difficulté à la question ; mais que si-

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

gnifie la seconde, qui est négative? Il paraît qu'elle ne peut répondre qu'au point m', qui est le second de ceux où Km coupe la circonférence; et en effet, si l'on cherche directement Km', en prenant cette droite pour l'inconnue x, on aura

$$x(x-c)=ab \quad \text{ou} \quad x=\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}c^2+ab};$$

donc la valeur positive est précisément la même que celle qui s'était présentée dans le premier cas avec le signe négatif. Donc, quoique les deux racines de l'équation

$$x=-\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}c^2+ab}$$

soient l'une positive, l'autre négative, elles doivent être prises toutes les deux dans le même sens par rapport au point fixe K. Ainsi la règle qui veut que ces racines soient prises en sens opposés porte à faux. Si au contraire le point fixe K était pris sur le diamètre même AB et non sur le prolongement, on trouverait pour x deux valeurs positives, et cependant elles devraient être prises en sens contraire l'une de l'autre. La règle est donc encore fausse pour ce cas. »

Tel est le texte de Carnot.

Pour répondre à ces objections, je remarquerai que ab est non-seulement le produit de KA par KB, mais encore celui de — KA par — KB, de sorte que si l'on prend à gauche de K, sur la droite AB, une longueur KA$'$ = KA et KB$'$ = KB, et que sur A$'$B$'$ comme diamètre on décrive une circonférence, les deux équations

$$x^2+cx+ab=0 \quad \text{et} \quad x^2-cx-ab=0,$$

et les valeurs d'x fournies par chacune d'elles se rapportent tout aussi bien au cercle A$'$B$'$ qu'au cercle AB. De sorte qu'après avoir déterminé le point m sur la circonférence AB au moyen de la valeur positive de x donnée par $x^2 + cx - ab = 0$ et tiré Km, si l'on prolonge Km au delà de K jusqu'à la rencontre du cercle A'B' en M', la droite KM' sera la valeur négative de x donnée par la même équation.

Et l'on peut dire que, si du point K comme centre, avec un rayon Km égal à l'une des valeurs positives de x, on décrit une circonférence, on déterminera sur les circonférences AB et A'B' quatre points m, n, M, N, et qu'en joignant le point K à ces quatre points, on aura toutes les droites qui résolvent le problème.

De même si du point K comme centre, avec un rayon égal à la valeur négative —KM', on décrit une circonférence, on déterminera sur les deux circonferences AB et A'B' quatre points m', n', M', N', et en joignant le point K à ces quatre points, on aura encore toutes les droites qui résolvent la question.

Et ces droites, qu'on les obtienne avec l'un ou l'autre rayon, sont deux à deux égales et de signes contraires.

Si le point K était donné dans l'intérieur du cercle, entre A et B, on construirait encore le cercle A'B'. Dans le cercle AB, AK sera négative et égale à $-a$, et BK positive et égale à b ; et dans le cercle A'B', A'K serait positive et égale à a, B'K négative et égale à $-b$. En introduisant cette circonstance dans les équations du cas précédent, les équations deviendraient

$$x^2 + cx + ab = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - cx + ab = 0.$$

Et ces équations se rapportent toutes deux à l'un et à l'autre des cercles AB et A'B'.

Et l'on construirait toutes les solutions relatives à l'un et à l'autre cercle, comme on l'a fait pour le premier cas.

La seule différence qu'il y ait entre ce cas et le précédent, c'est que les solutions négatives sont fournies par les mêmes équations, et que cela a lieu aussi pour les solutions positives.

Les objections de d'Alembert et de Carnot portaient donc à faux. Elles provenaient de ce que l'on restreignait la généralité du problème, en supposant que les équations obtenues ne convenaient qu'à un seul cercle, tandis qu'elles conviennent en réalité à deux cercles égaux et symétriquement placés par rapport au point K.