Exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 403-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__403_1>

EXPOSÉ DES PRINCIPES ÉLÉMENTAIRES DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS,

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR UN ABONNÉ.

Notions préliminaires sur les permutations.

Considérons n lettres $a, b, c, \ldots, k, l$; on sait qu'on appelle *permutations* de ces n lettres tous les résultats différents qu'on obtient en écrivant ces lettres les unes à la suite des autres de toutes les manières possibles. On divise les permutations en deux classes de la manière suivante :

Comparons dans une permutation une lettre à chacune de celles qui la suivent, on dira qu'il y a un dérangement toutes les fois que la seconde lettre précéderait la première dans l'ordre de l'alphabet. On appelle *paires* ou *positives* les permutations dans lesquelles le nombre des dérangements est pair, *impaires* ou *négatives* les permutations dans lesquelles le nombre des dérangements est impair.

Ainsi la permutation

$$cdba,$$

est impaire, parce qu'elle présente cinq dérangements

$$cb, \quad ca, \quad db, \quad da, \quad ba,$$

la permutation

$$cbda,$$

est paire, parce qu'elle a quatre dérangements

$$cb, \quad ca, \quad ba, \quad da.$$

Au lieu de lettres différentes, on peut prendre la même lettre affectée d'un indice variable. Par exemple, au lieu de

$$a, \quad b, \quad c, \ldots, \quad l,$$

on peut écrire

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, \quad a_n.$$

Dans ce cas, il y a dérangement toutes les fois que l'indice d'une lettre est inférieur à celui d'une lettre qui la précède.

Soit a_i une lettre, a_k une des lettres qui viennent après a_i : il y aura dérangement si

$$i - k > 0;$$

il n'y aura pas de dérangement si

$$i - k < 0.$$

Remarquons que $i - k$ ne peut être nul, car une lettre n'est jamais répétée deux fois dans la permutation. Il résulte de là la règle suivante.

Soit

$$a_{\alpha_1}, \quad a_{\alpha_2}, \ldots, \quad a_{\alpha_n}$$

une permutation quelconque des lettres

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_n,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant les indices 1, 2, 3, ..., n rangés dans un ordre quelconque. La permutation des lettres ou des indices (ce qui revient au même) sera paire ou impaire suivant que le produit

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{r} (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_n),\\ (\alpha_2-\alpha_3)\ldots(\alpha_2-\alpha_n),\\ (\alpha_3-\alpha_n),\\ \ldots\ldots\ldots\\ (\alpha_{n-1}-\alpha_n)\end{array}\right.$$

sera positif ou négatif.

En effet, à tout dérangement correspondra un facteur négatif dans le produit précédent, et, par suite, le produit sera positif s'il y a un nombre pair de dérangements et négatif dans le cas contraire.

Théorème. — *Si dans une permutation quelconque on échange deux indices, la permutation change de classe.*

Pour démontrer cette proposition, nous allons faire voir que le produit (1) change de signe lorsqu'on échange deux indices α_i et $\alpha_{i'}$.

Dans ce produit, se trouvent d'abord des facteurs qui ne contiennent ni α_i ni $\alpha_{i'}$. Ces facteurs ne sont pas changés.

Il y a aussi des facteurs qui contiennent soit α_i, soit $\alpha_{i'}$, avec un autre indice α_k. On peut les grouper de manière à avoir le produit

$$(\alpha_i-\alpha_k)(\alpha_k-\alpha_{i'}) \quad \text{ou} \quad (\alpha_i-\alpha_k)(\alpha_{i'}-\alpha_k)$$

ou

$$(\alpha_k-\alpha_i)(\alpha_{i'}-\alpha_k) \quad \text{ou} \quad (\alpha_k-\alpha_i)(\alpha_k-\alpha_{i'}),$$

et quand on permute α_i et $\alpha_{i'}$, le produit de ces deux facteurs ne change pas de signe.

Enfin, le produit (1) contient le facteur

$$\alpha_i-\alpha_{i'},$$

qui change de signe par la permutation des indices. Donc en définitive, le produit total change de signe, et par suite la permutation change de classe.

Corollaire. — Le nombre des permutations paires est égal au nombre des permutations impaires.

En effet, par l'échange de deux indices quelconques toutes les permutations changent de classe; il y en a donc autant de paires que d'impaires. Le nombre des permutations contenues dans chaque classe est

$$3.4.5\ldots n.$$

Définition du déterminant.

Considérons les n^2 lettres

$$\begin{array}{lll} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \ldots, & a_{2,n}, \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, & a_{n,n}. \end{array}$$

Dans le produit

$$a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3}\ldots a_{n,n},$$

on laisse les premiers indices invariables et l'on permute les seconds; on donne aux nouveaux produits ainsi obtenus le signe + ou le signe —, suivant que la permutation des seconds indices est paire ou impaire. La somme de tous les produits ainsi obtenus constitue le déterminant des n^2 lettres; ces lettres s'appellent les *éléments* du déterminant. (Il est clair qu'après avoir formé chaque terme, on pourra écrire ses n facteurs dans un ordre quelconque.)

Le déterminant se représente par le produit de ses éléments placé entre deux barres

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On voit que dans une ligne verticale ou *colonne* le second indice reste le même. Dans une ligne horizontale ou *ligne*, le premier indice ne change pas.

Loi de formation des termes. — Le déterminant contient un nombre de termes égal à 1, 2, 3,..., n, il y a autant de termes positifs que de termes négatifs. Dans chaque terme il y a un élément et un seul de chaque ligne et de chaque colonne.

Ainsi, si dans un terme figure l'élément $a_{i,k}$, il n'y aura plus d'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne, ni de la $k^{\text{ième}}$ colonne, car le premier indice i ou le second indice k ne sont jamais répétés.

Règle des signes. — On peut donner une règle générale et commode pour la détermination du signe d'un terme.

Soit un terme quelconque

$$a_{\alpha_1, i_1}, \quad a_{\alpha_2, i_2}, \ldots, \quad a_{\alpha_n, i_n},$$

dans lequel les premiers et seconds indices ne sont autre chose que les indices 1, 2, 3,..., n *écrits dans un ordre quelconque. On donnera au terme le signe* $+$ *ou le signe* — *suivant que les permutations des premiers et seconds indices seront de même classe ou de classe différente*.

En effet, si nous permutons deux lettres, ce qui ne change pas le produit, cela revient à permuter à la fois deux seconds indices et deux premiers indices. Donc les deux permutations changent ensemble de classe. On peut supposer que l'une des permutations, celle des premiers indices, par exemple, ait été ramenée par une série d'échanges à la permutation

$$1.2.3\ldots n,$$

et soit paire. Alors on donnera le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que l'autre permutation sera paire ou impaire. On voit que c'est bien la règle que nous avons établie.

Il résulte de cette règle la conséquence suivante. Les deux termes

$$a_{1,\alpha_1},\quad a_{2,\alpha_2},\ldots,\quad a_{n,\alpha_n},$$

$$a_{\alpha_1,1},\quad a_{\alpha_2,2},\ldots,\quad a_{\alpha_n,n},$$

se trouvent dans le déterminant avec le même signe, car la permutation des premiers indices dans l'un des termes est la permutation des seconds indices dans l'autre. Donc le déterminant ne changera pas si l'on échange les seconds indices avec les premiers indices. En d'autres termes :

Un déterminant ne change ni de signe ni de valeur quand on change les lignes en colonnes et les colonnes en lignes.

Par exemple :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Théoreme. — *Quand on échange deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe sans changer de valeur.*

En effet, cet échange revient à l'échange de deux indices, et le terme qu'on obtient en faisant cet échange doit donc se trouver dans le déterminant avec le signe opposé.

Corollaire. — Lorsque, dans un déterminant, deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant se réduit à o.

En effet, l'échange de ces deux colonnes identiques laisse le déterminant invariable, et il devrait en changer le signe. Donc le déterminant est nul.

Propriété essentielle. — Le déterminant est une fonction linéaire et homogène des éléments d'une ligne ou d'une colonne.

En effet, nous avons vu que chaque terme doit contenir un élément d'une ligne ou d'une colonne, et un seul.

Corollaire I. — Quand on multiplie ou on divise tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un même nombre, le déterminant est multiplié ou divisé par ce nombre.

Corollaire II. — Quand les éléments d'une ligne ou d'une colonne peuvent se décomposer en une somme de deux éléments, le déterminant se décompose en une somme de deux déterminants. Ainsi

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & a_1 & d_1 \\ b_3+c_2 & a_2 & d_2 \\ b_3+c_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & d_1 \\ c_2 & a_2 & d_2 \\ c_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Corollaire III. — Si l'on ajoute aux éléments d'une ligne ou d'une colonne ceux d'autres lignes ou colonnes multipliés par des constantes, la valeur du déterminant n'est pas changée. Par exemple :

$$\begin{vmatrix} a_1 + mb_1 + nc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + mb_2 + nc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + mb_3 + nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Les deux derniers déterminants sont nuls, parce qu'ils ont des colonnes identiques.

Formation du déterminant.

Si l'on applique la règle que nous avons donnée, on trouve

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - ba_1,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ab_1c_2 - ac_1b_2 + bc_1a_2 - ba_1c_2 + ca_1b_2 - cb_1a_2,$$

....

Dans le cas du déterminant de neuf éléments, il y a une règle simple qui est due à Sarrus et qu'on peut énoncer de la manière suivante.

On écrit les deux premières lignes au-dessous de la dernière

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{array}$$

Les trois termes positifs sont $ab_1\,c_2 + a_1\,b_2\,c + a_2\,bc_1$, et sont donnés par les trois diagonales inclinées de gauche à droite Les termes négatifs sont donnés par les autres diagonales $cb_1\,a_2$, $c_1\,b_2\,a$, $c_2\,ba_1$, inclinées de droite à gauche.

Voici du reste une règle qui permettra de décomposer un déterminant en une somme de déterminants d'ordre moindre.

Il est évident que, dans le déterminant

$$\text{(A)} \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2}\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

le coefficient de $a_{1,1}$ est le déterminant d'ordre moindre

$$\text{(B)} \qquad \begin{vmatrix} a_{2,2}\ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,2}\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

obtenu en supprimant la ligne et la colonne à laquelle appartient l'élément $a_{1,1}$. En effet, tout terme du déterminant (B) multiplié par $a_{1,1}$ se trouvera dans le déterminant (A), et il s'y trouvera avec le signe qu'il a dans le déterminant (B), puisqu'en plaçant devant ce terme l'élément $a_{1,1}$, on n'introduit aucun dérangement.

Considérons maintenant un élément quelconque a_{ik}. On peut échanger la colonne dont fait partie cet élément avec la colonne précédente, et ainsi de suite jusqu'à ce que la $k^{ième}$ colonne soit devenue la première. De même on peut échanger la $i^{ième}$ ligne avec la $i - 1^{ième}$, puis avec la $(i - 2)^{ième}$. L'élément a_{ik} occupera la première place. On voit qu'on pourra toujours amener l'élément a_{ik} à la première place, et il résulte de là la règle pratique sur la démonstration de laquelle nous n'insisterons pas davantage :

Le coefficient de a_{ik} est, au signe près, le déterminant dans lequel on a supprimé la ligne et la colonne à laquelle appartient a_{ik}. Il faut prendre ce déterminant avec le signe + si $i + k$ est pair, avec le signe — si $i + k$ est impair, en sorte que si l'on désigne ce déterminant par Δ_{ik}, le coefficient de a_{ik} sera

$$(-1)^{i+k}\Delta_{ik}.$$

Il y a une règle pratique très-simple pour avoir le signe avec lequel on doit prendre Δ_{ik}. L'élément a_{ik} appartient à la $i^{ième}$ ligne et à la $k^{ième}$ colonne. On peut, pour arriver à cet élément, partir de l'élément $a_{1,1}$ en suivant la première colonne jusqu'à la $i^{ième}$ ligne, puis la $i^{ième}$ ligne jusqu'à la $k^{ième}$ colonne. On change de signe à chaque nouvelle ligne ou colonne, et l'on obtient en définitive le signe avec lequel il faut prendre Δ_{ik}.

$$\begin{array}{|l}
a_{1,1} \\
a_{2,1} \\
\cdots \\
\underline{a_{i,1} \quad a_{i,2} \ldots \quad a_{ik}}
\end{array}$$

Nous avons vu que le déterminant est une fonction linéaire des éléments d'une ligne ou d'une colonne. On pourra au moyen de la remarque précédente trouver les coefficients de ces éléments. Ainsi on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$+ c \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

....

On dit dans ce cas que l'on ordonne le déterminant suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne. En prenant tous les éléments d'une ligne ou tous ceux d'une colonne, on sera sûr d'avoir le développement complet du déterminant.

Les déterminants obtenus en supprimant un certain nombre de lignes et un nombre égal de colonnes s'appellent *déterminants mineurs*.

(*La suite prochainement.*)