NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 37-43
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__37_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 437

(voir tome XVII, page 186);

PAR M. VENCESLAS NIÉBYLOWSKI,
Élève de spéciales au lycée Bonaparte.

O_1 *est une circonférence décrite sur un rayon de la circonférence* O *comme diamètre, on fait rouler* O *autour de* O_1. *On demande :*

1° *Le lieu décrit par un point quelconque du plan* O.

2° *L'enveloppe d'une droite quelconque liée invariablement à la circonférence* O (*). (MANNHEIM.)

1° Je mène le rayon O_1A qui passe par le point M du plan O, et je suppose que dans sa position initiale la circonférence O soit tangente en A à O_1. Trois cas peuvent se présenter, suivant que le point M est situé intérieurement à O, ou extérieurement, ou sur cette circonférence. Supposons M intérieur, soit un rayon OB'B quelconque, on sait que l'arc AB égale l'arc AB'; donc, dans la rotation de O, quand B vient en B', O vient en O' extrémité du diamètre $B'O_1$; de plus, après la rotation, la droite OA prendra la position O'A et M viendra en M' tel que O'M' égale OM.

Tout revient donc à joindre un point quelconque I de la circonférence O_1 au point A, puis de porter, à partir de I sur IA, une longueur égale à OM. Le lieu du point M est donc un limaçon de Pascal.

Suivant les trois positions de M relatives au cercle O, on aura une des trois formes différentes de la conchoïde du cercle.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

2° J'abaisse de O_1 une perpendiculaire sur la droite donnée, d'après ce qui précède le pied M de cette perpendiculaire décrit dans le mouvement de O un limaçon de Pascal. Tout revient donc à trouver l'enveloppe des perpendiculaires MC menées au rayon vecteur AM de l'origine A, or on sait que l'enveloppe de ces droites est une circonférence ayant son centre en O et pour rayon OM. C'est d'ailleurs un moyen connu d'obtenir la conchoïde du cercle : *on donne un cercle et un point fixe* A, *une tangente mobile* CM *roule sur le cercle*, *et du point* A *on abaisse* AM *perpendiculaire sur cette tangente*, M *décrit un limaçon de Pascal dont le cercle directeur a pour diamètre la distance de* A *au centre du cercle donné*.

On peut trouver facilement ce résultat par le calcul. En effet, en prenant A pour origine, AO_1 pour polaire, l'équation du limaçon est

$$\rho = a + b\cos\omega,$$

celle de MC perpendiculaire à AM est

$$\rho = \frac{a + b\cos\omega}{\cos(\omega - \alpha)}.$$

D'après la théorie des enveloppes, dérivons, il vient

$$\sin(\omega - \alpha) = \frac{b}{a}\sin\alpha,$$

d'où

$$\cos(\omega - \alpha) = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\alpha};$$

développons $\sin(\omega - \alpha)$ et élevons au carré, on obtient

$$\cos^2\omega + \frac{2b}{a}\sin^2\alpha\cos\omega + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0,$$

$$\cos\omega = -\frac{b}{a}\sin^2\alpha + \cos\alpha\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\alpha}.$$

Substituons $\cos\omega$ et $\cos(\omega-\alpha)$ dans la valeur de ρ, il vient en simplifiant

$$\rho = \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} + b\cos\alpha,$$

$$\rho^2 - 2b\rho\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0,$$

si l'on revient aux coordonnées cartésiennes,

$$y^2 + (x-b)^2 = a^2,$$

équation d'un cercle dont le centre est le point O_1, car $AM = b$, et le rayon AO, car $AO = a$.

Note. — La même question a été résolue géométriquement avec élégance par MM. Berquet et Jouffroy, élèves du lycée de Lyon.

Question 818

(voir 2e série, tome VI, page 335);

PAR M. TOUREN,
Repétiteur au lycée de Grenoble,

ET M. A. QUITTERAY,
Lieutenant de chasseurs à pied.

Si l'on envisage une chaînette dont la densité soit en raison de la courbure, et un arc quelconque symétrique par rapport au sommet, le centre de gravité de cet arc sera sur l'axe de la courbe à une hauteur au-dessus de la directrice marquée par le rapport de l'abscisse à l'inclinaison extrême.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Soient ρ le rayon de courbure, $\dfrac{ds}{\rho} = d\omega$ l'angle de contingence, y_1 l'ordonnée du centre de gravité, c'est-à-dire la hauteur de ce centre de gravité au-dessus de la directrice. On aura

$$(1) \qquad y_1 \int d\omega = \int y \frac{ds}{\rho},$$

puisque dans la chaînette le rayon de courbure est égal à la normale, on a

$$\rho = y\frac{ds}{dx},$$

et la formule (1) devient

$$y_1 \int d\omega = \int dx.$$

En intégrant entre les limites correspondantes aux extrémités M et M′ d'un arc symétrique par rapport au sommet, on trouve

$$2\omega y_1 = 2x,$$

d'où

$$y_1 = \frac{x}{\omega}.$$

Note. — Solutions analogues de MM. Leon Geoffroy, élève de l'École Centrale; Pellet, élève du lycée de Nîmes; Lucien Bignon, de Lima.

Question 834

(voir 2e série, t. VI, p. 480);

PAR M. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

Si a et b sont les deux axes d'une ellipse, R, R_1 *les rayons de deux cercles osculateurs, d la distance de leurs centres, p la distance du centre de l'ellipse à l'axe radical des deux cercles, on a la relation*

$$2dp = 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}}\right).$$

(L. PAINVIN.)

Soit $(a\cos u,\ b\sin u)$ un point de l'ellipse, le cercle osculateur en ce point a pour équation

$$\left(x - \frac{c^2\cos^3 u}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{c^2\sin^3 u}{b}\right)^2 = \frac{(b^2 + c^2\sin^2 u)^3}{a^2b^2},$$

ou, en développant,

$$x^2 - 2\frac{c^2\cos^3 u}{a}x + y^2 + 2\frac{c^2\sin^3 u}{b}y - 3c^2\sin^2 u + a^2 - 2b^2 = 0,$$

mais

$$R^2 = \frac{(b^2 + c^2\sin^2 u)^3}{a^2 b^2};$$

donc

$$b^2 + c^2\sin^2 u = (abR)^{\frac{2}{3}},$$

et l'on peut écrire l'équation qui précède de la manière suivante

$$(1)\quad x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y - 3(abR)^{\frac{2}{3}} + a^2 + b^2 = 0,$$

α, β étant les coordonnées du centre.

L'équation d'un autre cercle osculateur est

$$(2)\quad x^2 - 2\alpha_1 x + y^2 - 2\beta_1 y - 3(abR_1)^{\frac{2}{3}} + a^2 + b^2 = 0.$$

L'axe radical des cercles (1) et (2) est la droite

$$2(\alpha_1 - \alpha)x + 2(\beta_1 - \beta)y + 3(ab)^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}}\right) = 0.$$

D'après une formule connue, la distance de l'origine à cette droite (p) est égale à

$$\frac{3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}}\right)}{2\sqrt{(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\beta_1 - \beta)^2}},$$

or

$$d = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\beta_1 - \beta)^2},$$

donc

$$2pd = 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}}\right).$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Alfred Giard, Henri Ledoux, L. Redovez, élèves du lycée de Douai.

Question 835

(voir 2e série, t. VI, p. 480);

PAR M. AUGUSTE MACÉ,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

Une sphère et un plan étant donnés, démontrer que toutes les sphères décrites des différents points du plan comme centre, avec des rayons égaux aux tangentes menées de ces points à la sphère donnée, passent par un point fixe, et déterminer ce point (*).

(VITTORIO SANNDI.)

Soit O le centre de la sphère donnée, et soit Q le plan donné; de O abaissons la perpendiculaire OA sur le plan, et soit A le pied de cette perpendiculaire; si le théorème est vrai, c'est-à-dire s'il existe un point fixe, ce point, pour une raison de symétrie, devra se trouver sur la perpendiculaire OA, et à une distance de A, AP, égale à la tangente AB. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de prouver qu'une sphère décrite d'un point quelconque M du plan passe en P; soit MT la tangente, menons MO et MP; il suffit de prouver que

$$\mathrm{MT} = \mathrm{MP}.$$

Or

$$\overline{\mathrm{MT}}^2 = \overline{\mathrm{MO}}^2 - \mathrm{R}^2,$$

R étant le rayon de la sphère donnée. Dans le triangle MOP, on a

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \overline{\mathrm{MO}}^2 + \overline{\mathrm{OP}}^2 - 2\,\mathrm{OP}\,\mathrm{AO},$$

mais

$$\mathrm{OP} = \mathrm{AO} - \mathrm{AP} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AO}}^2 - \mathrm{R}^2,$$

donc on aura

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \overline{\mathrm{MO}}^2 + \overline{\mathrm{AP}}^2 - \overline{\mathrm{AO}}^2 = \overline{\mathrm{MO}}^2 - \mathrm{R}^2 = \overline{\mathrm{MT}}^2,$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

ce qu'il fallait démontrer. Donc toutes les sphères décrites des divers points du plan comme centres, avec des rayons égaux aux tangentes menées de ces points à la sphère donnée, passent par le point fixe P, et ce point est déterminé par la relation

$$\overline{AP}^2 = \overline{AO}^2 - R^2 \ (^*).$$

Note. — Solutions analogues de MM. Édouard Duviviers; Léon Geoffroy, élève de l'École Centrale; Willière de Thuin; Ch. Dupain, professeur; Julien Boulanger, élève au lycée de Dijon (classe de M. Marquet); Alfred Giard; Herment, élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout); L. Henning, élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout); H. Schefér, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Darboux); E Besson, étudiant en droit; Paul Endrès, élève du lycée de Douai; Jules Barbier, élève du lycée de Grenoble; Georges de Villepin, élève du collége Stanislas (classe de M. Gros); Morges, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Darboux); Andry, élève de l'École de Sainte-Barbe (classe de M. Bourgeois) Jaricot; Welsch, élève du lycée de Metz.