Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 367-372

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__367_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 843

(voir 2e série, t. VII, p. 44),

PAR M. A. IMBERT.

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE. — PROPOSITION A DÉMONTRER.

Si l'on joint les sommets d'un triangle à un point O *intérieur par trois droites, les pieds de ces trois droites déterminent un second triangle inscrit dans le premier, qui comprend en outre trois autres triangles, puis un troisième inscrit de même dans le second, qui comprend en outre trois autres triangles, et ainsi de suite.*

On demande de démontrer que :

1° *Les côtés de tous ces triangles concourent en trois points* P, I, E, *qui sont sur une ligne droite* D; *j'appelle* e, p, i *les points où les droites qui concourent en* O *coupent cette droite* D;

(*) *Voir* la *Théorie élémentaire des quantités complexes* par M. Hoüel, et les tomes VI et VII des *Nouvelles Annales*.

2° *Dans l'intérieur de chacun des triangles énumérés, il existe un point tel, que, si on le joint aux sommets par des droites, ces lignes passent aux points* e, p, i;

3° *Les points ainsi obtenus sont trois à trois sur des lignes droites qui passent par des points* P, I, E;

4° *On peut former ainsi un quinconce géométrique dont les allées donnent vue sur des points remarquables de la ligne* D. *On demande de démontrer encore qu'on peut construire un nouveau quinconce en conservant les mêmes points remarquables (savoir* P, I, E, *et leurs compagnons* e, p, i*) tout en prenant un nouveau point* O′ *pour point de départ de toute la construction.*

(J.-E. Barbier.)

1° Soit $A'B'C'$ un des triangles; celui-ci et le triangle donné ABC ont par construction leurs sommets sur trois droites concourantes; donc, en vertu d'un théorème connu, leurs côtés se rencontrent deux à deux en trois points situés en ligne droite.

2° Dans le triangle $AB'C'$ par exemple, le point cherché se trouve sur Ae menée déjà. Je joins $C'i$, $B'p$. Tout revient à montrer que ces droites concourent en un même point de Ae. Or les triangles $AB'C'$, $A'B'C'$, dont les côtés se coupent en trois points en ligne droite, ont, en vertu de la réciproque du théorème déjà cité, leurs sommets sur trois droites concourantes; donc il existe dans chaque triangle un point répondant à la question. J'appelle α, β, γ ces points, dont O lui-même fait partie.

3° Les triangles $AB'C'$, ABC ont leurs sommets sur trois droites concourantes et leurs côtés se coupent en trois points en ligne droite, P', E', I'. Les triangles $AB'C'$, $A'B'C'$ fournissent par la même raison trois points P'', E'', I''. Mais les côtés des triangles ABC, $A'B'C'$ dont les sommets sont sur ces mêmes droites concourantes, se coupent sur la droite D. Donc, les points P', E', I'; P'', E'', I'' ne sauraient différer des points P, E, I.

4° Les quatre droites issues d'un des points i, e, p, du point i par exemple, Ai, αi, $A'i$, ei ou D forment un faisceau anharmonique, qui a un rapport anharmonique et un rayon homologue communs, avec un second faisceau issu d'un des points P, E, I de P, par exemple, et engendré par les mêmes points A, α, A', e. Donc (et c'est le théorème sur lequel repose toute la démonstration précédente) les trois autres couples de droites différentes de D se coupent en trois points en ligne droite. Mais de cette droite font partie : e par hypothèse, O' par définition même. Donc un point O' donnera un nouveau quinconce dont les allées donneront vue sur les mêmes points remarquables de D que le point O.

C. Q. F. D.

Même question;

PAR M. JOUFFRAY,
Elève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Darboux).

1° Je prends le triangle donnée ABC pour triangle de référence; les équations de ses côtés seront $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Les équations des droites Aa, Bb, Cc qui se coupent en O, sont

$$(Aa) \qquad m\beta - n\gamma = 0,$$
$$(Bb) \qquad n\gamma - l\alpha = 0,$$
$$(Cc) \qquad l\alpha - m\beta = 0;$$

cherchons l'équation d'un côté du triangle intérieur, bc par exemple; cette ligne passe par l'intersection des droites AB, Cc d'une part, Ac, Bb de l'autre; son équation sera donc

$$(bc) \qquad l\alpha - m\beta - n\gamma = 0,$$

de même

$$(ca) \qquad m\beta - n\gamma - l\alpha = 0,$$
$$(ab) \qquad n\gamma - l\alpha - m\beta = 0;$$

et il est aisé de voir que les points P, I, E d'intersection de (bc, α), (ca, β), (ab, γ) sont sur la droite représentée par l'équation

$$(\mathrm{PE}) \qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = 0.$$

Je considère le nouveau triangle inscrit dans abc; je le désigne par $a'b'c'$. Je vais démontrer que les droites Bc, bc, $b'c'$ se coupent au même point P. Or, $b'c'$ doit passer par l'intersection des droites Bb, ac d'une part, Cc, ab d'autre part; son équation sera donc

$$(b'c') \qquad 3l\alpha - m\beta - n\gamma = 0,$$

de même

$$(c'a') \qquad 3m\beta - n\gamma - l\alpha = 0,$$
$$(a'b') \qquad 3n\gamma - l\alpha - m\beta = 0.$$

Si j'ajoute à l'équation de bc, celle de BC multipliée par 2, j'obtiens celle de $b'c'$. Donc ces trois droites se coupent en un même point P. Il en sera de même pour les deux groupes $(c'a', ca, \mathrm{CA})$, $(a'b', ab, \mathrm{BA})$. Donc les côtés de tous les triangles formés se coupent en trois points situés sur une même droite D.

2° Soient e, p, i les points où la droite D est rencontrée par les droites Aa, Bb, Cc. Je joins pc et ib; les équations de ces deux droites sont

$$(pc) \qquad 3n\gamma + m\beta - l\alpha = 0,$$
$$(ib) \qquad 3m\beta + n\gamma - l\alpha = 0;$$

retranchant ces deux équations, on trouve

$$2(n\gamma - m\beta) = 0,$$

qui est l'équation de Aa; donc les trois lignes se coupent en un même point.

La propriété subsiste évidemment pour les triangles Bac, Cab, ainsi que pour les triangles intérieurs à abc; car alors abc se trouve relativement à $a'b'c'$ dans les mêmes conditions que ABC par rapport à abc.

3° Soient O, O', O'' les points ainsi obtenus dans les triangles Abc, Bca, Cab; O_2, O'_2, O''_2, les points analogues dans les triangles $ab'c'$, $bc'a'$, $ca'b'$, et ainsi de suite; les trois points O_1, O'_1, O''_1 sont sur une droite passant par E. En effet, la droite EO_1 aura pour équation

$$(EO_1) \qquad 5n\gamma - m\beta - l\alpha = 0,$$

car elle passe par l'intersection de (AB, D) et de (pc, Aa). Le point O'_1 est déterminé par l'intersection de

$$(Bb) \qquad l\alpha - n\gamma = 0$$

et de

$$(CE) \qquad 3n\gamma + l\alpha - m\beta = 0;$$

et l'intersection de ces droites se trouve sur EO_1, car retranchant de l'équation de (Cc) celle de (Bb) multipliée par 2, je retrouve celle de (EO_1). Le point O''_2 est encore sur cette ligne; il se trouve, en effet, sur les lignes

$$(Cc) \qquad l\alpha - m\beta = 0,$$

et

$$(pa') \qquad 3l\alpha - m\beta - 5n\gamma = 0.$$

Or, si de cette dernière équation, je retranche la précédente multipliée par 2, j'obtiens

$$l\alpha + m\beta - 5n\gamma = 0,$$

donc O''_2 se trouve encore sur EO_1.

On voit de même que les points P, O'_1, O''_1, O_2 sont en ligne droite, ainsi que I, O_1, O''_1, O'_2.

4° Prenant un nouveau point O, je puis, en conservant les points P, I, E, e, p, i, former une nouvelle figure analogue. Considérons un point ω sur un plan coupant le plan de la figure suivant la ligne D, et projetons la figure sur ce nouveau plan en prenant pour centre de la projection un point quelconque de la droite ωO : la nouvelle figure formée jouira des propriétés démontrées, et les points de la droite D seront bien les mêmes dans les deux figures.

5° On peut encore, dans la figure, signaler quelques particularités intéressantes; ainsi, j'ai pour les lignes telles que PA, les équations

(PA)	$m\beta + n\gamma = 0,$
(IB)	$n\gamma + l\alpha = 0,$
(EC)	$l\alpha + m\beta = 0;$

retranchant ces équations deux à deux, j'obtiens les équations des droites Aa, Bb, Cc. Donc, les droites PA, IB, EC se coupent deux à deux sur Aa, Bb, Cc.

Note. — Ont résolu la même question : MM. Janin et Griolet, du lycée de Grenoble (comme M. Imbert); Gabriel Lippmann, du lycée Napoléon; Morges, du lycée Louis-le-Grand; Gregoire, du collége Rollin (par la projection conique d'un triangle equilateral); Paul Endrès, du lycée de Douai; André Raoul, du lycée Louis-le-Grand; Lourde, du lycée de Pau; Coulomb, du lycée de Nîmes (par les propriétés des transversales et l'homologie).