NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 318-335
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__318_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 803

(voir 2e série, t. VI, p. 141);

PAR M. LAISANT,
Capitaine du Génie, à Brest.

Les transformations usitées en Géométrie, comme la similitude, le procédé des rayons vecteurs réciproques, etc., ont pour effet de conserver sans altération certains éléments des figures, tels que les angles, etc. Montrer que les formules suivantes sont *la forme la plus générale* de celles qui sont relatives à la sous-tangente et à la sous-normale en coordonnées rectangulaires ou en coordonnées polaires. Les quatre premières conservent ces longueurs, dans une courbe quelconque, sauf une rapport fixe $\frac{m}{n}$, qui peut devenir l'unité; les quatre suivantes les changent l'une dans l'autre, sauf encore le rapport fixe $\frac{m}{n}$ (*).

I. *Conserver, sauf un rapport constant* $\frac{m}{n}$:

1° *La sous-tangente en coordonnées rectangulaires*

$$x = mx_1 + A, \quad y = By_1^n;$$

2° *La sous-tangente en coordonnées polaires*

$$\theta = m\theta_1 + A, \quad r = \frac{1}{\frac{n}{r_1} + B};$$

3° *La sous-normale en coordonnées rectangulaires*

$$x = nx_1 + A, \quad y = \sqrt{my_1^2 + B};$$

4° *La sous-normale en coordonnées polaires*

$$\theta = n\theta_1 + A, \quad r = mr_1 + B.$$

II. *Changer, sauf un rapport constant* $\frac{m}{n}$:

1° *La sous-tangente en sous-normale (coordonnées rectangulaires)*

$$x = \frac{m}{2}y_1^2 + A, \quad y = Be_1^{nx};$$

2° *La sous-tangente en sous-normale (coordonnées polaires)*

$$\theta = mr_1 + A, \quad r = \frac{1}{B - n\theta_1};$$

3° *La sous-normale en sous-tangente (coordonnées*

(*) Nous avons corrigé, dans la reproduction de ces formules, quelques incorrections, provenant de l'impression sans aucun doute. Les deux principales consistent dans un changement de signe dans la deuxième formule (II, 2°) et dans la première formule (II, 4°).

rectangulaires)

$$x = n \log y_1 + A, \quad y = \sqrt{2mx_1 + B};$$

4° *La sous-normale en sous-tangente* (*coordonnées polaires*)

$$\theta = A - \frac{n}{r_1}, \quad r = m\theta_1 + B.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Je rappelle les expressions suivantes, bien connues :

Sous-tangente: en coordonnées rectangulaires . $y\dfrac{dx}{dy}$, en coordonnées polaires...... $r^2\dfrac{d\theta}{dr}$;

Sous-normale: en coordonnées rectangulaires . $y\dfrac{dy}{dx}$, en coordonnées polaires...... $\dfrac{dr}{d\theta}$.

Il est clair que la recherche des formules ci-dessus revient à résoudre la question suivante d'une manière générale : exprimer x et y en fonction de x_1 et y_1 (ou r et θ en fonction de r_1 et θ_1) de façon à satisfaire respectivement aux relations suivantes :

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{llll} 1^\circ & y\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{m}{n} y_1 \dfrac{dx_1}{dy_1}, & 2^\circ & r^2\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{m}{n} r_1^2 \dfrac{d\theta_1}{dr_1}, \\ 3^\circ & y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{m}{n} y_1 \dfrac{dy_1}{dx_1}, & 4^\circ & \dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{m}{n} \dfrac{dr_1}{d\theta_1}; \end{array}\right.$$

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{llll} 1^\circ & y\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{m}{n} y_1 \dfrac{dy_1}{dx_1}, & 2^\circ & r^2\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{m}{n} \dfrac{dr_1}{d\theta_1}, \\ 3^\circ & y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{m}{n} y_1 \dfrac{dx_1}{dy_1}, & 4^\circ & \dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{m}{n} r_1^2 \dfrac{d\theta_1^2}{dr_1^2}. \end{array}\right.$$

Cela fait en réalité huit questions distinctes à résoudre. Avant de les traiter séparément, nous poserons $\frac{m}{n} = \mathrm{K}$ pour tous les calculs, et nous considérerons K comme une constante tout à fait arbitraire. En outre, nous écrivons

$$(1)\quad y = f(x_1 y_1), \qquad (2)\quad x = \varphi(x_1 y_1),$$
$$(3)\quad r = \mathrm{F}(r_1 \theta_1), \qquad (4)\quad \theta = \Phi(r_1 \theta_1),$$

et nous conserverons ces notations jusqu'à la fin aussi. La question sera de trouver dans chaque cas la forme de ces fonctions f, φ, F, Φ.

I.

1°

$$y\frac{dx}{dy} = \mathrm{K}y_1\frac{dx_1}{dy_1}.$$

Or de (1) et (2) je tire

$$dy = f'_{x_1}(x_1 y_1)\,dx_1 + f'_{y_1}(x_1 y_1)\,dy_1,$$

et

$$dx = \varphi'_{x_1}(x_1 y_1)\,dx_1 + \varphi'_{y_1}(x_1 y_1)\,dy_1.$$

Il vient donc

$$\mathrm{K}y_1\frac{dx_1}{dy_1} = f(x_1 y_1)\frac{\varphi'_{x_1}(x_1 y_1)\,dx_1 + \varphi'_{y_1}(x_1 y_1)\,dy_1}{f'_{x_1}(x_1 y_1)\,dx_1 + f'_{y_1}(x_1 y_1)\,dy_1}$$
$$= \frac{\varphi'_{x_1}(x_1 y_1)\dfrac{dx_1}{dy_1} + \varphi'_{y_1}(x_1 y_1)}{f'_{x_1}(x_1 y_1)\dfrac{dx_1}{dy_1} + f'_{y_1}(x_1 y_1)} \times f(x_1 y_1),$$

$$\mathrm{K}y_1 f'_{x_1}(x_1 y_1)\frac{dx_1^2}{dy_1^2} + \left[\mathrm{K}y_1 f'_{y_1}(x_1 y_1) - f(x_1 y_1)\varphi'_{x_1}(x_1 y_1)\right]\frac{dx_1}{dy_1}$$
$$- f(x_1 y_1)\varphi'_{y_1}(x_1 y_1) = 0.$$

Cette égalité devant être satisfaite quelle que soit la valeur de $\frac{dx_1}{dy_1}$, il en résulte les trois suivantes

$$f'_{x_1}(x_1 y_1) = 0, \quad \varphi'_{y_1}(x_1 y_1) = 0,$$
$$\mathrm{K} y_1 f'_{y_1}(x_1 y_1) - f(x_1 y_1)\,\varphi'_{x_1}(x_1 y_1) = 0,$$

dont les deux premières nous montrent que x et y sont de la forme $f(y_1)$ et $\varphi(x_1)$; la troisième devient

$$\mathrm{K} y_1 f'(y_1) = f(y_1)\,\varphi'(x_1), \quad \varphi'(x_1) = \frac{\mathrm{K} y_1 f'(y_1)}{f(y_1)}.$$

Sous cette forme on voit qu'il faut égaler les deux membres à une même quantité arbitraire quelconque, car ces deux membres sont deux fonctions de variables différentes; nous aurons ainsi

$$\varphi'(x_1) = m,$$
$$\varphi(x_1) = x = m x_1 + \mathrm{A},$$
$$\frac{\mathrm{K} y_1 f'(y_1)}{f(y_1)} = m, \quad \frac{f'(y_1)}{f(y_1)} = \frac{m}{\mathrm{K}}\frac{1}{y_1} = \frac{n}{y_1},$$

et, remontant aux fonctions primitives,

$$l f(y_1) = n l y_1 + l\mathrm{B}, \quad f(y_1) = y = \mathrm{B} y_1^n.$$

2°

$$r^2 \frac{d\theta}{dr} = \mathrm{K} r_1^2 \frac{d\theta_1}{dr_1}.$$

De (3) et (4) je tire

$$dr = \mathrm{F}'_{r_1}(r_1 \theta_1)\, dr_1 + \mathrm{F}'_{\theta_1}(r_1 \theta_1)\, d\theta_1,$$
$$d\theta = \Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1)\, dr_1 + \Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1)\, d\theta_1.$$

Il vient

$$\mathrm{K} r_1^2 \frac{d\theta_1}{dr_1} = \mathrm{F}^2(r_1\theta_1) \frac{\Phi'_{r_1}(r_1\theta_1)\,dr_1 + \Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\,d\theta_1}{\mathrm{F}'_{r_1}(r_1\theta_1)\,dr_1 + \mathrm{F}'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\,d\theta_1}$$

$$= \mathrm{F}^2(r_1\theta_1) \frac{\Phi'_{r_1}(r_1\theta_1) + \Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\dfrac{d\theta_1}{dr_1}}{\mathrm{F}'_{r_1}(r_1\theta_1) + \mathrm{F}'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\dfrac{d\theta_1}{dr_1}},$$

$$\mathrm{K} r_1^2 \mathrm{F}'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\frac{d\theta_1^2}{dr_1^2} + \left[\mathrm{K} r_1^2 \mathrm{F}'_{r_1}(r_1\theta_1) - \mathrm{F}^2(r_1\theta_1)\Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\right]\frac{d\theta_1}{dr_1}$$
$$- \mathrm{F}^2(r_1\theta_1)\,\Phi'_{r_1}(r_1\theta_1) = 0.$$

Raisonnant d'une façon analogue à celle suivie ci-dessus, il vient :

$$\mathrm{F}'_{\theta_1}(r_1\theta_1) = 0, \quad \Phi'_{r_1}(r_1\theta_1) = 0, \quad \mathrm{K} r_1^2 \mathrm{F}'(r_1) = \mathrm{F}^2(r_1)\,\Phi'(\theta_1),$$

$$\Phi'(\theta_1) = \mathrm{K} r_1^2 \frac{\mathrm{F}'(r_1)}{\mathrm{F}^2(r_1)},$$

$$\Phi'(\theta_1) = m, \quad \Phi(\theta_1) = \theta = m\theta_1 + \mathrm{A},$$

$$\mathrm{K} r_1^2 \frac{\mathrm{F}'(r_1)}{\mathrm{F}^2(r_1)} = m, \quad r_1^2 \frac{\mathrm{F}'(r_1)}{\mathrm{F}^2(r_1)} = \frac{m}{\mathrm{K}} = n,$$

$$\frac{\mathrm{F}'(r_1)}{\mathrm{F}^2(r_1)} = \frac{n}{r_1^2}.$$

Remontant aux fonctions primitives, nous aurons

$$\frac{1}{\mathrm{F}(r_1)} = \frac{n}{r_1} + \mathrm{B}, \quad \mathrm{F}(r_1) = r = \frac{1}{\dfrac{n}{r_1} + \mathrm{B}}.$$

3°

$$y\frac{dy}{dx} = \mathrm{K} y_1 \frac{dy_1}{dx_1},$$

$$\mathrm{K} y_1 \frac{dy_1}{dx_1} = f(xy) \frac{f'_{x_1}(x_1y_1) + f'_{y_1}(x_1y_1)\dfrac{dy_1}{dx_1}}{\varphi'_{x_1}(x_1y_1) + \varphi'_{y_1}(x_1y_1)\dfrac{dy_1}{dx_1}},$$

$$K y_1 \varphi'_{y_1}(x_1 y_1)\frac{dy_1^2}{dx_1^2} + \left[K y_1 \varphi'_{x_1}(x_1 y_1) - f(x_1 y_1) f'_{y_1}(x_1 y_1)\right]\frac{dy_1}{dx_1}$$
$$- f(xy) f'_{x_1}(x_1 y_1) = 0,$$

$$\varphi'_{y_1}(x_1 y_1) = 0, \quad f'_{x_1}(x_1 y_1) = 0, \quad K y_1 \varphi'(x_1) - f(y_1) f'(y_1) = 0,$$

$$K\varphi'(x_1) = \frac{f(y_1) f'(y_1)}{y_1},$$

$$K\varphi'(x_1) = m, \quad \varphi'(x_1) = \frac{m}{K} = n, \quad \varphi(x_1) = nx_1 + A = x,$$

$$f(y_1) f'(y_1) = my_1,$$
$$f(y_1)^2 = my_1^2 + B,$$
$$y = f(y_1) = \sqrt{B + my_1^2}.$$

4°

$$\frac{dr}{d\theta} = K\frac{dr_1}{d\theta_1}.$$

$$K\frac{dr_1}{d\theta_1} = \frac{F'_{r_1}(r_1\theta_1)\frac{dr_1}{d\theta_1} + F'_{\theta_1}(r_1\theta_1)}{\Phi'_{r_1}(r_1\theta_1)\frac{dr_1}{d\theta_1} + \Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1)},$$

$$K\Phi'_{r_1}(r_1\theta_1)\frac{dr_1^2}{d\theta_1^2} + \left[K\Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1) - F'_{r_1}(r_1\theta_1)\right]\frac{dr_1}{d\theta_1} - F'_{\theta_1}(r_1\theta_1) = 0,$$

$$\Phi'_{r_1}(r_1\theta_1) = 0, \quad F'_{\theta_1}(r_1\theta_1) = 0, \quad K\Phi'(\theta_1) = F'(r_1),$$

$$K\Phi'(\theta_1) = m, \quad \Phi'(\theta_1) = \frac{m}{K} = n,$$

$$\Phi(\theta_1) = \theta = n\theta_1 + A,$$
$$F'(r_1) = m, \quad F(r_1) = r = mr_1 + B.$$

II.

1°

$$y\frac{dx}{dy} = Ky_1\frac{dy_1}{dx_1}.$$

$$\mathrm{K}y_1 \frac{dy_1}{dx_1} = f(x_1 y_1) \frac{\varphi'_{x_1}(x_1 y_1) + \varphi'_{y_1}(x_1 y_1) \dfrac{dy_1}{dx_1}}{f'_{x_1}(x_1 y_1) + f'_{y_1}(x_1 y_1) \dfrac{dy_1}{dx_1}},$$

$$\mathrm{K}y_1 f'_{y_1}(x_1 y_1) \frac{dy_1^2}{dx_1^2} + \left[\mathrm{K}y_1 f'_{x_1}(x_1 y_1) - f(x_1 y_1)\varphi'_{y_1}(x_1 y_1)\right] \frac{dy_1}{dx_1}$$
$$- f(x_1 y_1)\varphi'_{x_1}(x_1 y_1) = 0,$$

$$f'_{y_1}(x_1 y_1) = 0, \quad \varphi'_{x_1}(x_1 y_1) = 0, \quad \mathrm{K}y_1 f'(x_1) - f(x_1)\varphi'(y_1) = 0,$$

$$\frac{\varphi'(y_1)}{y_1} = \mathrm{K} \frac{f'(x_1)}{f(x_1)},$$

$$\frac{\varphi'(y_1)}{y_1} = m, \quad \varphi'(y_1) = my_1, \quad \varphi(y_1) = x = \frac{m}{2} y_1^2 + \mathrm{A},$$

$$\mathrm{K} \frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = m, \quad \frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \frac{m}{\mathrm{K}} = n, \quad lf(x_1) = nx_1 + l\mathrm{B},$$

$$f(x_1) = y = \mathrm{B}e^{nx_1}.$$

2°

$$r^2 \frac{d\theta}{dr} = \mathrm{K} \frac{dr_1}{d\theta_1}.$$

$$\mathrm{K} \frac{dr_1}{d\theta_1} = \mathrm{F}^2(r_1 \theta_1) \frac{\Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1)\, dr_1 + \Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1)\, d\theta_1}{\mathrm{F}'_{r_1}(r_1 \theta_1)\, dr_1 + \mathrm{F}'_{\theta_1}(r_1 \theta_1)\, d\theta_1}$$

$$= \frac{\mathrm{F}^2(r_1 \theta_1) \left[\Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1) \dfrac{dr_1}{d\theta_1} + \Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1)\right]}{\mathrm{F}'_{r_1}(r_1 \theta_1) \dfrac{dr_1}{d\theta_1} + \mathrm{F}'_{\theta_1}(r_1 \theta_1)},$$

$$\mathrm{KF}'_{r_1}(r_1 \theta_1) \frac{dr_1^2}{d\theta_1^2} + \left[\mathrm{KF}'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) - \mathrm{F}^2(r_1 \theta_1)\Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1)\right] \frac{dr_1}{d\theta_1}$$
$$- \mathrm{F}^2(r_1 \theta_1)\Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) = 0,$$

$$\mathrm{F}'_{r_1}(r_1 \theta_1) = 0, \quad \Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) = 0, \quad \mathrm{KF}'(\theta_1) - \mathrm{F}^2(\theta_1)\Phi'(r_1) = 0,$$

$$\Phi'(r_1) = \mathrm{K} \frac{\mathrm{F}'(\theta_1)}{\mathrm{F}^2(\theta_1)},$$

$$\Phi'(r_1) = m, \quad \Phi(r_1) = \theta = mr_1 + \mathrm{A},$$

$$\mathrm{K}\frac{\mathrm{F}'(\theta_1)}{\mathrm{F}^2(\theta_1)} = m, \quad \frac{\mathrm{F}'(\theta_1)}{\mathrm{F}^2(\theta_1)} = \frac{m}{\mathrm{K}} = n,$$

$$-\frac{1}{\mathrm{F}(\theta_1)} = n\theta_1 - \mathrm{B},$$

$$\mathrm{F}(\theta_1) = r = \frac{1}{\mathrm{B} - n\theta_1}.$$

3°

$$y\frac{dy}{dx} = \mathrm{K}y_1\frac{dx_1}{dy_1}.$$

$$\mathrm{K}y_1\frac{dx_1}{dy_1} = f(x_1y_1)\frac{f'_{x_1}(x_1y_1)\,dx_1 + f'_{y_1}(x_1y_1)\,dy_1}{\varphi'_{x_1}(x_1y_1)\,dx_1 + \varphi'_{y_1}(x_1y_1)\,dy_1}$$

$$= \frac{f(x_1y_1)\left[f'_{x_1}(x_1y_1)\dfrac{dx_1}{dy_1} + f'_{y_1}(x_1y_1)\right]}{\varphi'_{x_1}(x_1y_1)\dfrac{dx_1}{dy_1} + \varphi'_{y_1}(x_1y_1)},$$

$$\mathrm{K}y_1\varphi'_{x_1}(x_1y_1)\frac{dx_1^2}{dy_1^2} + \left[\mathrm{K}y_1\varphi'_{y_1}(x_1y_1) - f(x_1y_1)f'_{x_1}(x_1y_1)\right]\frac{dx_1}{dy_1}$$
$$-f(x_1y_1)f'_{y_1}(x_1y_1) = 0,$$

$$\varphi'_{x_1}(x_1y_1) = 0, \quad f'_{y_1}(x_1y_1) = 0, \quad \mathrm{K}y_1\varphi'(y_1) = f(x_1)f'(x_1),$$

$$\mathrm{K}y_1\varphi'(y_1) = m, \; \varphi'(y_1) = \frac{m}{\mathrm{K}y_1} = \frac{n}{y_1}, \; \varphi(y_1) = x = nly_1 + \mathrm{A},$$

$$f(x_1)f'(x_1) = m, \quad f^2(x_1) = 2mx_1 + \mathrm{B},$$

$$f(x_1) = y = \sqrt{2mx_1 + \mathrm{B}}.$$

4°

$$\frac{dr}{d\theta} = \mathrm{K}r_1^2\frac{d\theta_1}{dr_1},$$

$$K r_1^2 \frac{d\theta_1}{dr_1} = \frac{F'_{r_1}(r_1\theta_1)\,dr_1 + F'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\,d\theta_1}{\Phi'_{r_1}(r_1\theta_1)\,dr_1 + \Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\,d\theta_1}$$

$$= \frac{F'_{r_1}(r_1\theta_1) + F'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\dfrac{d\theta_1}{dr_1}}{\Phi'_{r_1}(r_1\theta_1) + \Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\dfrac{d\theta_1}{dr_1}},$$

$$K r_1^2 \Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\frac{d\theta_1^2}{dr_1^2} + \left[K r_1^2 \Phi'_{r_1}(r_1\theta_1) - F'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\right]\frac{d\theta_1}{dr_1}$$
$$- F'_{r_1}(r_1\theta_1) = 0,$$

$$\Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1) = 0, \quad F'_{r_1}(r_1\theta_1) = 0, \quad K r_1^2 \Phi'(r_1) - F'(\theta_1) = 0,$$

$$K r_1^2 \Phi'(r_1) = m, \quad \Phi'(r_1) = \frac{m}{K r_1^2} = \frac{n}{r_1^2}, \quad \Phi(r_1) = \theta = A - \frac{n}{r_1},$$

$$F'(\theta_1) = m, \quad F(\theta_1) = r = m\theta_1 + B.$$

On voit que nous avons retrouvé toutes les formules énoncées dans la question.

Remarques.

1. Si nous changeons x en y, r en θ, et inversement, dans les diverses expressions rappelées plus haut, nous trouverons les suivantes

$$x\frac{dy}{dx}, \quad \theta^2\frac{dr}{d\theta}, \quad x\frac{dx}{dy}, \quad \frac{d\theta}{dr}.$$

La première et la troisième de ces expressions représentent ce qu'on peut appeler la sous-tangente et la sous-normale *relatives à l'axe des y* en coordonnées rectangulaires. La quatrième n'est autre que l'inverse de la sous-normale en coordonnées polaires. Voyons ce que représente la deuxième. Soit OZ l'axe polaire, MT, MN la tangente et la normale à une courbe au point M, OB une perpendiculaire à OZ à l'origine, MA, NB des arcs de cercle de centre O et terminés à OZ et OB. Nous aurons

$$AM = r\theta, \quad BN = \frac{dr}{d\theta}\theta, \quad OM = r,$$

donc

$$\frac{AM.BN}{OM} = \theta^2 \frac{dr}{d\theta}.$$

Ainsi l'expression $\theta^2 \frac{dr}{d\theta}$ est une quatrième proportionnelle à OM, AM et BN. Nous appellerons P cette longueur, pour abréger.

Le simple changement indiqué résout donc les questions de transformations qui suivent :

I. Conserver, sauf un rapport constant :

1° La sous-tangente relative à l'axe des y en coordonnées rectangulaires ;

2° La longueur P en coordonnées polaires ;

3° La sous-normale relative à l'axe des y en coordonnées rectangulaires.

II. Changer, sauf un rapport constant :

1° La sous-tangente en sous-normale (relatives à l'axe des y), en coordonnées rectangulaires ;

2° La ligne P en l'inverse de la sous-normale (coordonnées polaires) ;

3° La sous-normale en sous-tangente (relatives à l'axe des y), en coordonnées rectangulaires ;

4° L'inverse de la sous-normale en la ligne P (coordonnées polaires).

Les formules I (4°) ne donnent lieu à rien de nouveau puisqu'elles conservent la sous-normale et par conséquent l'inverse de cette ligne.

2. Si dans les mêmes expressions

$$y\frac{dx}{dy},\quad r^2\frac{d\theta}{dr},\quad y\frac{dy}{dx}\quad \text{et}\quad \frac{dr}{d\theta},$$

nous changeons y en r, x en θ, et inversement, nous avons

$$r\frac{d\theta}{dr},\quad y^2\frac{dx}{dy},\quad r\frac{dr}{d\theta}\quad \text{et}\quad \frac{dy}{dx},$$

qui représentent :

La première, la tangente trigonométrique tangν de l'angle que forme la tangente avec le rayon vecteur (coordonnées polaires) ;

La deuxième, le produit L^2 de l'ordonnée par la sous-tangente (coordonnées rectangulaires) ;

La troisième, le produit Π^2 du rayon vecteur par la sous-normale (coordonnées polaires) ;

La quatrième, le coefficient angulaire de la tangente (coordonnées rectangulaires).

Ainsi se trouvent résolues les nouvelles questions suivantes :

I. Conserver, sauf un rapport constant :

1° Tangν en coordonnées polaires ;

2° Le produit L^2 (coordonnées rectangulaires) ;

3° Le produit Π^2 (coordonnées polaires) ;

4° Le coefficient angulaire de la tangente (coordonnées rectangulaires).

II. Changer, sauf un rapport constant :

1° Tangν en Π^2 (coordonnées polaires) ;

2° L^2 en coefficient angulaire de la tangente (coordonnées rectangulaires) ;

3° Π^2 en tangν (coordonnées polaires) ;

4° Le coefficient angulaire de la tangente en Π^2 (coordonnées rectangulaires).

3. Si, toujours dans les mêmes expressions et dans les formules résultantes, nous changeons au contraire y en θ_1, x en r, et inversement, nous obtenons

$$\theta\frac{dr}{d\theta},\quad x^2\frac{dy}{dx},\quad \theta\frac{d\theta}{dr},\quad \frac{dx}{dy},$$

expressions qui représentent :

La première, l'arc BN (*voir* plus haut) en coordonnées polaires;

La deuxième, le produit L'^2 de l'abscisse par la sous-tangente relative à l'axe des y, en coordonnées rectangulaires;

La troisième, l'inverse d'une troisième proportionnelle à l'arc BN et à la sous-normale ON, en coordonnées polaires : soit $\frac{1}{Q}$ cet inverse;

La quatrième, l'inverse du coefficient angulaire de la tangente, en coordonnées rectangulaires.

D'où résulte la solution des questions qui suivent :

I. Conserver, sauf un rapport constant :

1° L'arc BN (coordonnées polaires);

2° Le produit L'^2 (coordonnées rectangulaires);

3° La ligne Q (coordonnées polaires).

II. Changer, sauf un rapport constant :

1° L'arc BN en l'inverse de la ligne Q (coordonnées polaires);

2° Le produit L'^2 en l'inverse du coefficient angulaire de la tangente (coordonnées rectangulaires);

3° La ligne Q en l'inverse de l'arc BN (coordonnées polaires);

4° Le coefficient angulaire de la tangente en l'inverse du produit L'^2 (coordonnées rectangulaires).

Note. — Ont résolu la même question MM. Brun et Rachou; Lucien Bignon, à Lima (Pérou); Neuberg, professeur à Bruges.

Questions 822 *et* 823

(voir 2e série, t. VI, p. 336);

PAR M. E. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

822. *Un trièdre trirectangle est circonscrit à une surface du second degré. Démontrer que les normales à cette surface aux points de contact des faces du trièdre et le diamètre qui passe par le sommet de ce trièdre appartiennent à un même hyperboloïde.* (MANNHEIM.)

On peut généraliser ce théorème et l'énoncer ainsi : Dans un trièdre (SABC) circonscrit à une surface du second degré, les parallèles ($\gamma\gamma_1$, $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$) menées par chaque point de contact d'une face (γ, α, β) à l'arête opposée, et le diamètre (SO) qui passe par le sommet du trièdre appartiennent à un même hyperboloïde.

Projetons les quatre droites sur l'une des faces (ASB) par des droites parallèles à l'arête opposée (SC). Le point β se projette sur la droite SA, le point α sur l'arête SB et les droites ($\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$) suivant des parallèles ($\alpha'\alpha'_1$, $\beta'\beta'_1$) aux droites SA, SB. La droite SO passant par le centre de la conique intersection de la surface par le plan $\gamma\beta\alpha$, sa projection SO′ est un diamètre de la projection de cette conique ; cette dernière étant tangente en $\beta'\alpha'$ aux droites SA, SB, la droite SO′ passe par le milieu de $\beta'\alpha'$ et par suite par le point de rencontre R des droites $\alpha'\alpha'_1$, $\beta'\beta'_1$.

La droite menée par ce point (R) parallèlement à SC rencontre donc trois des droites considérées et est parallèle à la quatrième.

Par les mêmes constructions sur les autres faces, on obtient deux autres droites qui s'appuient chacune sur trois des droites données et sont parallèles à la quatrième ; ces quatre droites sont donc sur un même hyperboloïde. C. Q. F. D.

823. *Deux surfaces gauches ayant une génératrice commune sont telles, que leurs deux plans tangents communs se coupent à angle droit. Démontrer que, pour la génératrice commune, le plan central de l'une touche l'autre au point où le plan central de celle-ci touche la première.*

(MANNHEIM.)

Je prends la génératrice commune pour axe des Z ; on peut prendre pour axe des Y et des X, deux droites perpendiculaires entre elles et à l'axe des Z, telles que l'équation d'un plan tangent à l'une des surfaces en un point situé sur l'axe des Z, à une distance z de l'origine, ait pour équation

$$(1) \qquad Y = \frac{z}{g} X.$$

$Y = 0$ est alors l'équation du plan central de cette surface.

En prenant pour axe des Y' et des X', les deux droites analogues à Y et X par rapport à la seconde surface, l'équation du plan tangent à celle-ci en un point situé sur l'axe des Z à une distance z' de la nouvelle origine, est

$$Y' = \frac{z'}{g'} X'.$$

Le plan $Y' = 0$ est le plan central de cette seconde surface.

Soient :

$$X' = X \cos\alpha + Y \sin\alpha,$$
$$Y' = Y \cos\alpha - X \sin\alpha,$$
$$z' = z - a$$

les équations de transformation.

L'équation du plan tangent à la seconde surface, en un point situé sur l'axe des Z, à une distance z de la première origine, est, dans le premier système d'axes de coordonnées,

$$Y \cos\alpha - X \sin\alpha = \frac{z-a}{g'}(Y \sin\alpha + X\cos\alpha),$$

$$(2) \qquad Y = X\left(\frac{g' \sin\alpha + (z-a)\cos\alpha}{g'\cos\alpha - (z-a)\sin\alpha}\right).$$

Pour les plans tangents communs, les équations (1) et (2) étant identiques, on a

$$\frac{z}{g} = \frac{g'\sin\alpha + (z-a)\cos\alpha}{g'\cos\alpha - (z-a)\sin\alpha},$$

ce qui donne, pour déterminer z, l'équation

$$z^2 - z[a + (g'-g)\cot\alpha] - ga\cot\alpha + gg' = 0.$$

Soient z_1 et z_2 les racines de cette équation : la condition pour que les plans correspondants soient perpendiculaires est que le produit $z_1 z_2$ soit egal à $-g^2$, puisque ces plans ont pour équation

$$Y = \frac{z_1}{g}X, \quad Y = \frac{z_2}{g}X,$$

ce qui donne

$$(3) \qquad g + g' = a\cot\alpha.$$

Le plan central $Y = 0$ de la première surface touche la seconde au point déterminé par l'équation

$$g'\sin\alpha + (z-a)\cos\alpha = 0.$$

Le plan central $Y = X\,\mathrm{tg}\,\alpha$ de la seconde surface touche la première au point déterminé par l'équation

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{z}{g}.$$

Pour que ces deux points coïncident, il faut que l'on ait

$$g' \sin\alpha + (g \operatorname{tg}\alpha - a)\cos\alpha = 0,$$

d'où

$$(4) \qquad g' + g = a \operatorname{cotg}\alpha.$$

Les relations identiques (3) et (4) démontrent le théorème et sa réciproque.

Question 850

(voir 2e série, t. VII, p. 137);

PAR M. E. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

Considérons la suite des fonctions de Sturm

$$V, V_1, V_2, \ldots, V_n;$$

si une des équations $V_r = 0$ *a* p *racines imaginaires, la proposée a au moins* p *racines imaginaires.*

(DARBOUX.)

Soient Δ, Δ_r le nombre des variations perdues respectivement par les suites

$$V, V_1, V_2, \ldots, V_n,$$
$$V_r, V_{r+1}, \ldots, V_n,$$

dans le passage de $x = -\infty$ à $x = \infty$. On a

$$\Delta_r + r \geqq \Delta.$$

Δ est le nombre des racines réelles de $V = 0$; Δ_r est au plus égal au nombre μ des racines réelles de $V_r = 0$, car la seconde des suites précédentes ne peut perdre une variation que lorsque V_r s'annule. L'inégalité précédente peut donc s'écrire

$$\mu + r \geqq \Delta.$$

On en tire

$$m - \Delta \geqq m - r - \mu,$$

m étant le degré de V. Mais $m - \Delta$ est égal au nombre $2\mathrm{I}$ des racines imaginaires de $\mathrm{V} = 0$; donc

$$2\mathrm{I} \geqq m - r - \mu.$$

D'ailleurs le degré de V_r étant au plus égal à $m - r$, on a

$$m - r - \mu \geqq p,$$

donc

$$2\mathrm{I} \geqq p.$$

C. Q. F. D.