NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. LAISANT
ÉTIENNE BEAUJEUX

De quelques propriétés des fractions périodiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 289-304
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__289_0>

DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FRACTIONS PÉRIODIQUES;

PAR MM. A LAISANT ET ÉTIENNE BEAUJEUX (*).

1. Exprimer un nombre entier dans le système de numération dont la base est B, c'est mettre ce nombre sous la forme $\alpha_0 + \alpha_1 B + \ldots + \alpha_n B^n$, les coefficients α_0, $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ étant tous inférieurs à B. Ces coefficients sont dans le système considéré les *chiffres* du nombre en question, lequel s'écrit : $\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0$. Nous aurons occasion d'employer cette notation plus loin, notation qu'il ne faudrait pas confondre avec le produit des nombres $\alpha_n \ldots \alpha_0$. Cette confusion ne saurait être faite dans ce qui va suivre, le genre de la question indiquant toujours suffisamment de quoi il s'agit.

Il est clair que ce problème : *écrire un entier dans un système de numération donné*, conduit toujours à une solution unique parfaitement limitée. Pour l'obtenir, on divise le nombre donné par la base B; le reste de la division est α_0; on opère de même sur le quotient obtenu, et ainsi de suite.

2. Nous dirons qu'exprimer une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ dans le système de numération dont la base est B, c'est la mettre sous la forme

$$\frac{\alpha_1}{B} + \frac{\alpha_2}{B^2} + \ldots,$$

(*) Plusieurs théorèmes de cet article sont connus; nous l'avons néanmoins inséré *in extenso* pour en faciliter la lecture (*voir* les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. I, p. 457; t. II, p. 522; t. V, p. 397; t. VIII, p. 50). J. B.

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ étant plus petits que B. La fraction s'écrira

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$$

On arrivera à ce résultat en multipliant p par B et en divisant le produit par q; le quotient sera le premier chiffre α_1; on multipliera le reste par B, on divisera encore par q, et ainsi de suite. Voyons à quelle condition l'opération peut se terminer : supposons qu'on ait

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha_1}{B} + \frac{\alpha_2}{B^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{B^n} = \frac{\alpha_1 B^{n-1} + \ldots + \alpha_n}{B^n} = \frac{P}{B^n}.$$

Pour que cette égalité ait lieu, il faut que P et B^n soient des équimultiples de p et q; par conséquent, il faut que q ne contienne que des facteurs premiers appartenant à B; s'il en est ainsi, l'opération aura donné successivement tous les chiffres $\alpha_1 \ldots \alpha_n$.

Si q renferme au contraire d'autres facteurs premiers que ceux de B, l'opération ne saurait se terminer; mais comme les chiffres $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ sont inférieurs à B, il faudra bien qu'on finisse par trouver un de ceux déjà obtenus; à partir de là, toute la suite se reproduira dans le même ordre : l'opération et le résultat lui-même prendront un caractère *périodique*. Le nombre formé par les chiffres qui se reproduisent périodiquement au quotient s'appelle la *période*.

Cette période peut commencer à être obtenue dès l'origine des opérations, ou bien ne prendre naissance qu'après une première série de divisions qui ne se reproduiront pas. Dans le premier cas la fraction est *périodique simple*, et dans le second *périodique mixte*.

3. Ce dernier genre de fractions, le plus général, a évidemment une expression de la forme

$$\frac{P}{B^m} + \frac{\alpha_1}{B^{m+1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{B^{m+n}} + \frac{\alpha_1}{B^{m+n+1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{B^{m+2n}} + \ldots$$

ou

$$\frac{P}{B^m} + \frac{\alpha_1 B^{n-1} + \alpha_2 B^{n-2} + \ldots + \alpha_n}{B^m (B^n - 1)} = \frac{(B^n - 1) P + P'}{B^m (B^n - 1)},$$

P′ représentant la période et P la partie non périodique.

Supposons que le dénominateur q de la fraction à convertir ne contienne aucun facteur premier appartenant à B; la fraction ci-dessus étant égale à $\frac{p}{q}$, il est clair que son numérateur devra être divisible par B^m et conséquemment par B. Donc P′ — P doit être divisible par B; mais c'est impossible, car il faudrait que P′ — P fût terminé par un zéro dans le système de numération considéré, c'est-à-dire que le dernier chiffre de P et celui de P′ fussent identiques; la période aurait donc commencé plus tôt qu'on ne l'a supposé. Ainsi : *une fraction dont le dénominateur n'a aucun facteur commun avec la base ne peut donner lieu qu'à une fraction périodique simple.*

4. Si le dénominateur q renferme au contraire des facteurs communs à B, il est clair qu'on peut prendre m assez grand pour que, la fraction $\frac{B^m}{q}$ étant réduite à sa plus simple expression $\frac{p'}{q'}$, q' ne contienne plus aucun facteur de B. Cela posé, écrivons

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{B^m} \frac{pB^m}{q} = \frac{1}{B^m} \frac{pp'}{q'} = \frac{1}{B^m} \frac{p''}{q'}.$$

$\frac{p''}{q'}$ sera ou une expression fractionnaire, ou une fraction, mais ne pourra donner lieu, en dehors de la partie entière, qu'à une fraction périodique simple. Le tout, divisé par B^m, ce qui se fera par un simple déplacement de la virgule, fournira une fraction périodique mixte.

On voit ainsi que la recherche de toute fraction périodique mixte peut être ramenée à celle d'une fraction périodique simple. C'est de cette dernière espèce que nous allons nous occuper dans tout ce qui va suivre.

5. *Une fraction irréductible* $\frac{p}{q}$ *donnant lieu à une période de n chiffres, toute autre fraction irréductible* $\frac{p'}{q}$ *ayant même dénominateur fournira aussi une période de n chiffres.*

En effet, dans le cas d'une fraction périodique simple, le seul qui nous intéresse, l'expression du n° 23 ci-dessus prend la forme $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{B}^n - 1}$, P représentant la période. On peut donc dire que si la fraction à convertir est mise sous la forme $\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{B}^{n'} - 1}$ la question sera résolue : P′ sera la période et n' le nombre des chiffres de cette période (y compris, bien entendu, les zéros qui peuvent se trouver à sa gauche).

Or il suffit évidemment pour cela que $\mathrm{B}^{n'} - 1$ soit un multiple de q, la fraction donnée étant irréductible. La valeur du numérateur n'y fait rien. Donc à un même dénominateur q correspondra toujours un même nombre de chiffres n à la période.

De ce qui précède, on peut conclure que l'équation indéterminée $\mathrm{B}^x - 1 = m.q$ (*) admet toujours au moins une racine entière inférieure à q. Cette racine donne le nombre des chiffres de la période si elle est seule; en tous cas, ce nombre est toujours égal à la plus petite des racines entières. On peut remarquer enfin qu'une racine n de

(*) Nous employons la notation $m.q$ comme représentant *un multiple de* q.

l'équation ci-dessus étant donnée, tous les multiples de n seront aussi racines, car $B^{kn} - 1$ est un multiple de $B^n - 1$.

6. Soit la fraction $\frac{p_1}{q}$ qui donne n chiffres à la période. En désignant par $p_2, p_3, \ldots, p_n$, les restes, en nombre $n - 1$, successivement obtenus dans le cours de l'opération, nous aurons

$$\begin{aligned}
Bp_1 &= \alpha_1 q + p_2,\\
Bp_2 &= \alpha_2 q + p_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Bp_{n-1} &= \alpha_{n-1} q + p_n,\\
Bp_n &= \alpha_n q + p_1.
\end{aligned}$$

On voit que si l'on avait voulu convertir la fraction $\frac{p_2}{q}$, il eût suffi de commencer par la division indiquée par la deuxième égalité ci-dessus; comme période, au lieu de $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$, on aurait eu $\alpha_2 \ldots \alpha_n \alpha_1$; il en est de même pour toutes les fractions $\frac{p_3}{q} \ldots \frac{p_n}{q}$, et on voit sans peine que toutes ces fractions sont irréductibles. Ainsi toute opération pareille à celle ci-dessus permet de convertir à la fois n fractions irréductibles différentes ayant q pour dénominateur. De plus, toute fraction non encore obtenue pourra l'être par une opération analogue. Par conséquent le nombre total $\varphi(q)$ des fractions irréductibles ayant q pour dénominateur est divisible par n, puisque ces fractions peuvent être réunies en divers groupes, chacun comprenant n d'entre elles. Soit donc $\varphi(q) = kn$. Nous aurons

$$B^{\varphi(q)} - 1 = B^{kn} - 1 = m.(B^n - 1) = m.q,$$

puisque $B^n - 1 = m.q$.

On peut évidemment énoncer ce résultat comme il suit :

B *et* q *étant premiers entre eux*, *et* $\varphi(q)$ *représentant le nombre des fractions irréductibles ayant* q *pour dénominateur, c'est-à-dire le nombre des entiers premiers avec* q, *et non supérieurs à ce nombre*, $B^{\varphi(q)} - 1$ *sera un multiple de* q. (Théorème de Fermat généralisé.)

7. Si nous supposons q premier, on a $\varphi(q) = q - 1$. Ainsi B *n'étant pas multiple du nombre premier* q, $B^{q-1} - 1$ *sera multiple de* q. (Théorème de Fermat.)

8. Soient P, P′, P″... toutes les périodes fournies par les fractions irréductibles ayant q pour dénominateur; ces périodes, comme on l'a vu plus haut (6), se divisent en groupes de n chacune, et dans chaque groupe, toutes les périodes s'obtiennent par les permutations circulaires des chiffres de l'une quelconque d'entre elles. Nous aurons

$$\frac{p}{q} = \frac{P}{B^n - 1},$$

$$\frac{p'}{q} = \frac{P'}{B^n - 1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si nous ajoutons ces égalités, la somme des premiers membres donnera $\frac{1}{2}\varphi(q)$; en effet à $\frac{p}{q}$ correspond $\frac{q-p}{q}$, si bien que les fractions peuvent être groupées par deux, la somme de chaque couple étant égale à 1; donc la somme de toutes les fractions est égale à la moitié de leur nombre.

Désignant par ΣP la somme $P + P' + \ldots$, nous aurons donc

$$\frac{1}{2}\varphi(q) = \frac{\Sigma P}{B^n - 1}.$$

9. Considérons la fraction $\frac{1}{q}$ qui donne n chiffres à la période, et soit P cette période, ou $a_1\,a_2\ldots a_n$ en l'écrivant dans le système de numération considéré. On voit que les divers nombres $a_2\ldots a_n a_1$, $a_3\ldots a_1 a_2, \ldots,$ $a_n a_1\ldots a_{n-1}$ seront des multiples de $a_1\,a_2\ldots a_n$; c'est une propriété assez remarquable de la période obtenue, propriété qui donne la solution de ce problème : *Écrire un nombre de n chiffres tel, que les nombres formés par les permutations circulaires des chiffres soient des multiples du premier.*

10. *Soit q un nombre premier qui donne lieu à une période de n chiffres, et soit α un diviseur de n; la période sera divisible par* $B^\alpha - 1$, car on aura

$$\frac{p}{q} = \frac{P}{B^n - 1} = \frac{P}{(B^\alpha - 1)Q}.$$

Or q doit diviser $(B^\alpha - 1)Q$ et par suite $B^\alpha - 1$ ou Q; mais il ne peut diviser $B^\alpha - 1$, sans quoi la période n'aurait que α chiffres; donc il divise Q; et comme la fraction doit pouvoir se réduire à $\frac{p}{q}$, il faut que le facteur $B^\alpha - 1$ entre aussi au numérateur P.

11. Si nous supposons en particulier que le nombre des chiffres de la période soit pair et égal à $2n$, la période sera divisible par $B^n - 1$, d'après ce qui précède. On aura donc, en appelant $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ ses différents chiffres,

$$a_1\,B^{2n-1} + a_2\,B^{2n-2} + \ldots + a_{2n} = m.(B^n - 1),$$

ou

$$B^n(a_1\,B^{n-1} + a_2\,B^{n-2} + \ldots + a_n) \\ + a_{n+1}\,B^{n-1} + \ldots + a_{2n} = m.(B^n - 1).$$

$$(B^n - 1)(a_1 B^{n-1} + \dots + a_n)$$
$$+ (a_1 + a_{n+1}) B^{n-1} + \dots + (a_n + a_{2n}) = m.(B^n - 1),$$
$$(a_1 + a_{n+1}) B^{n-1} + \dots + (a_n + a_{2n}) = m.(B^n - 1).$$

Si l'on remarque que $a_1, \dots, a_{2n}$ sont tous inférieurs à B, on verra sans peine que ce dernier multiple de $B^n - 1$ ne peut être autre que $B^n - 1$ lui-même, ce qui exige qu'on ait

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_{n+1} = B - 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n + a_{2n} = B - 1. \end{array} \right.$$

Donc : *Un dénominateur premier donnant lieu à une période d'un nombre pair de chiffres, la somme des chiffres de même rang dans chaque demi-période est égale à* $B - 1$.

On a alors

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p}{q} = \dfrac{(B^n - 1)(a_1 B^{n-1} + \dots + a_n) + (B^n - 1)}{B^{2n} - 1} \\ \quad = \dfrac{a_1 B^{n-1} + \dots + a_n + 1}{B^n + 1}. \end{array} \right.$$

12. Si l'on ajoute les diverses relations (1) du numéro précédent, on a

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = n(B - 1),$$

formule qui nous donne la somme des chiffres de la période.

Cette somme, on le voit, est tout à fait indépendante du numérateur de la fraction.

13. Supposant toujours le dénominateur premier et le nombre des chiffres de la période pair, considérons les divers numérateurs $p_1, p_2 \ldots$ des fractions que l'on convertit par une même opération, c'est-à-dire les divers restes obtenus successivement, restes qui ne sont autres que ceux obtenus en divisant p_1, $p_1 B$, $p_1 B^2, \ldots$ par q.

Appelons toujours $2n$ le nombre des chiffres de la période, et prenons deux restes p_1, p_{n+1}, distants de n rangs en suivant l'ordre où on les a obtenus. Nous aurons [n° 11, relation (2)]

$$\frac{p_1}{q} = \frac{a_1 B^{n-1} + \ldots + a_n + 1}{B^n + 1},$$

$$\frac{p_{n+1}}{q} = \frac{a_{n+1} B^{n-1} + \ldots + a_{2n} + 1}{B^n + 1}.$$

Ajoutant, et tenant compte des relations (1) du n° 11, il vient

$$\frac{p_1 + p_{n+1}}{q} = 1 \qquad p_1 + p_{n+1} = q.$$

Donc : *Si l'on range les restes dans l'ordre où on les obtient, à partir d'un instant quelconque, et qu'on sépare cette suite de* $2n$ *nombres en deux groupes égaux, la somme de deux nombres du même rang dans chaque groupe est égale au dénominateur* q.

Ces restes ou résidus jouissent de propriétés remarquables dont celle-ci est un exemple. Mais nous ne saurions chercher à les développer ici sans sortir de notre sujet.

14. Supposons que le dénominateur q soit premier et donne lieu à une période de $q - 1$ chiffres. Soit en particulier $abc \ldots fgh$ la période fournie par $\frac{1}{q}$. Écrivons les divers nombres

$$\begin{array}{r} abc\ldots fgh \\ abc\ldots fg \\ abc\ldots f \\ \ldots\ldots \\ abc \\ ab \\ a, \end{array}$$

et additionnons-les à la manière ordinaire; soit S la somme.

Nous avons

$$\frac{B}{q} = a, bc\ldots\ldots\ldots = a + \frac{b}{B} + \frac{c}{B^2} + \ldots$$

$$\frac{B^2}{q} = ab, c\ \ldots\ldots\ldots = ab + \frac{c}{B} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{B^{q-1}}{q} = ab\ldots h, ab\ldots = ab\ldots h + \frac{a}{B} + \frac{b}{B^2} + \ldots.$$

D'où par addition

$$\frac{B}{q}\,\frac{B^{q-1}-1}{B-1} = S + (a + b\ldots + h)\left(\frac{1}{B-1}\right).$$

Mais $q-1$ est pair puisque q est premier. Nous avons donc (n° 12)

$$a + b + \ldots + h = \frac{1}{2}(q-1)(B-1),$$

et il vient

$$(1)\qquad \frac{B}{q}\,\frac{B^{q-1}-1}{B-1}\,P = S + \frac{1}{2}(q-1).$$

Si l'on appelle P la période, on a

$$\frac{1}{q} = \frac{P}{B^{q-1}-1}, \quad \text{donc} \quad P = \frac{B^{q-1}-1}{q}$$

et

$$(2)\qquad \frac{B}{B-1}P = S + \frac{1}{2}(q-1).$$

Si dans l'addition qui a donné S on avait supprimé le premier des nombres écrits ci-dessus, c'est-à-dire la période elle-même, on aurait trouvé une somme $S' = S - P$. La relation (2) donne alors

$$(3)\qquad \frac{P}{B-1} = S' + \frac{1}{2}(q-1),$$

$$P - \frac{1}{2}(q-1)(B-1) = S'(B-1),$$

ou

$$(4)\qquad P - (a + b + \ldots + h) = S'(B-1).$$

Ainsi *la période diminuée de la somme de ses chiffres significatifs a pour expression* $S'(B-1)$.

Si dans la relation (3) ci-dessus on rétablit la valeur de $P = \frac{B^{q-1}-1}{q}$ et qu'on effectue la division de $B^{q-1}-1$ par $B-1$, on trouve

$$(5)\qquad B^{q-2} + B^{q-3} + \ldots + B + 1 = q\left[S' + \frac{1}{2}(q-1)\right],$$

ce qui montre que *le nombre* $q\left[S' + \frac{1}{2}(q-1)\right]$ *s'obtient en écrivant* $q-1$ *fois le chiffre* 1 *dans le système de numération considéré.*

En partant de $\frac{p}{q}$ au lieu de $\frac{1}{q}$ on aurait trouvé la relation (2) ci-dessus. Quant aux autres, elles seraient modifiées, et conduiraient à des conséquences analogues, en remplaçant P par $P \times p$. Nous ne les développerons pas ici, pour éviter de trop nous étendre.

15. *Si deux nombres q et q' premiers entre eux, étant pris comme dénominateurs, donnent séparément, l'un n chiffres, et l'autre n' chiffres à la période, le produit qq' pris comme dénominateur donnera un nombre de chiffres égal au plus petit multiple de n et n'.*

En effet, si $\frac{1}{q}$ donne n chiffres, c'est que $B^n - 1$ est divisible par q, sans qu'aucune des puissances inférieures à n jouisse de cette propriété On a donc $B^n = m.q + 1$. De là

$$B^{n+1} = m.q + B,$$
$$B^{n+2} = m.q + B^2,$$
$$B^{n+3} = m.q + B^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B^{2n} = m.q + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit donc qu'il n'y a que les puissances de la forme B^{kn} qui soient égales à un multiple de $q + 1$. De même il n'y a que les puissances de la forme $B^{k'n'}$ qui jouissent d'une propriété pareille par rapport à q'. Or il s'agit de trouver une puissance x de B, telle que $B^x - 1$ soit multiple de qq', et par conséquent divisible par q et q' séparément, puisque ces deux nombres n'ont aucun facteur commun; x devra donc être à la fois multiple de n et de n', et le plus petit de ces multiples sera le nombre de chiffres de la période.

Il est aisé de voir que ce théorème s'étend au cas de plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux; le raisonnement serait analogue.

16. *q étant un nombre premier, si $\frac{1}{q}$ donne n chiffres à la période, $\frac{1}{q^2}$ en donnera nq.*

On verrait comme ci-dessus (15) que le nombre cherché doit être multiple de n. Désignons-le par nx. Il faut que $B^{nx} - 1$ soit divisible par q^2; si nous divisons $B^{nx} - 1$ par $B^n - 1$ qui contient déjà le facteur q, le quotient devra donc être encore multiple de q. Or, ce quotient est

$$B^{n(x-1)} + B^{n(x-2)} + \ldots + B^{2n} + B^n + 1.$$

Tous les termes sont de la forme $m.q + 1$; le quotient est donc de la forme $m.q + x$, et l'on voit qu'il faut $x = q$ au moins pour qu'il soit divisible par q, ce qui donne nq comme nombre des chiffres de la période.

Remarque. — Ce raisonnement suppose que $B^n - 1$ est divisible par q sans l'être par q^2, sans quoi le nombre des chiffres de la période serait évidemment le même. Dans ce qui va suivre il faut admettre encore la même restriction, étendue aux puissances supérieures. Mais la plus haute puissance de q qui entre dans $B^n - 1$ étant considérée comme un simple facteur premier Q, les conclusions seraient vraies pour les puissances de Q.

17. *q étant premier, si $\frac{1}{q}$ donne n chiffres à la période, $\frac{1}{q^a}$ en donnera $q^{a-1}n$.*

En effet, si nous considérons $\frac{1}{q^3}$, le nombre X cherché doit être tel que $B^X - 1$ soit divisible par q^3 et par suite par q^2. Il est donc de la forme Knq d'après le n° précédent, et le quotient $\frac{B^{knq} - 1}{B^{nq} - 1}$ doit être divisible par q; on démontrerait comme plus haut que cela conduit à

$$k = q, \quad \text{d'où} \quad X = nq^2.$$

Partant de là on verrait d'une façon analogue que $\frac{1}{q^4}$

donne nq^3 chiffres, et ainsi de suite; et généralisant la loi à la manière ordinaire, on arriverait à conclure que $\frac{1}{q^a}$ donne nq^{a-1} chiffres.

18. *Soit* N *un nombre composé égal à* $A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots$, $A, B, C\ldots$ *représentant ses divers facteurs premiers* (*avec la restriction du n°* 16 *ci-dessus*); *si les fractions* $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \ldots$ *donnent respectivement* $a, b, c, \ldots$ *chiffres à leurs périodes, et qu'on désigne par* M *le plus petit multiple de* $a, b, c\ldots$, *la fraction* $\frac{1}{N}$ *donnera un nombre de chiffres égal au plus à*

$$M \times A^{\alpha-1} \times B^{\beta-1} \times C^{\gamma-1} \times \ldots = N \times \frac{M}{ABC\ldots}.$$

En effet (17) la fraction

$$\frac{1}{A^\alpha} \text{ donnerait } aA^{\alpha-1} \text{ chiffres,}$$

$$\frac{1}{B^\beta} \text{ donnerait } bB^{\beta-1} \text{ chiffres,}$$

et ainsi de suite.

Pour avoir le nombre cherché, il faudra donc (15) prendre le plus petit multiple de ces nombres, ce qui donne au plus l'expression indiquée ci-dessus.

Si tous les nombres $a, b, c, \ldots$ étaient premiers entre eux deux à deux, et premiers aussi deux à deux avec tous les facteurs $A, B, C, \ldots$, le nombre cherché serait exactement

$$a \times b \times c \times \ldots \times A^{\alpha-1} \times B^{\beta-1} \times C^{\gamma-1} \ldots$$
$$= a \times b \times c \times \ldots \times \frac{N}{A \times B \times C \times \ldots}.$$

Pour terminer sans entrer dans de trop longs développements, nous énonçons ici quelques questions dont les solutions s'obtiendront à peu de frais. La plupart sont des corollaires immédiats de ce qui précède.

I. Soit q un nombre premier tel que $\frac{1}{q}$ donne $q-1$ chiffres à la période. Cette période renfermera un nombre de zéros égal au quotient entier obtenu en divisant q par la base.

II. Le dénominateur q n'étant pas premier, supposons que le nombre des chiffres de la période fourni par $\frac{1}{q}$ soit $\varphi(q)$, défini comme on l'a vu au n° 6. Si l'on fait la somme S comme au n° 14, qu'on désigne par B la base et par P la période, démontrer qu'on aura

$$\frac{B}{B-1}P = S + \frac{1}{2}\varphi(q).$$

En déduire des relations analogues à celles du n° 14.

III. q étant premier avec 10, le dernier chiffre de la période décimale fourni par $\frac{1}{q}$ ne peut être qu'un des suivants 1, 3, 7, 9.

IV. Sachant que le dénominateur donné q fournit $q-1$ chiffres à la période dans le système décimal, trouver la période fournie par $\frac{1}{q}$ sans faire une seule division.

V. Une fraction irréductible dont le dénominateur est de la forme $2^n \times p$, p étant premier, donne lieu à une fraction décimale périodique mixte où le nombre des chiffres de la période est pair. Démontrer que la somme du dernier chiffre de la partie non périodique avec le dernier chiffre de la première demi-période est égale à 4 ou à 14.

VI. Soit une fraction décimale périodique due à un dénominateur de la forme $2^n \times 5^{n'} \times q$, le nombre q étant premier; supposons que la période soit composée de hp chiffres. Désignons par Π le nombre formé par la partie non périodique suivie de la période, et par P la partie non périodique. Si l'on forme le nombre $\Pi - P$, qu'on le divise en tranches de p chiffres à partir de la droite (ces tranches pouvant être complètes ou incomplètes), qu'on en fasse la somme, qu'on agisse de même sur cette somme dans le cas où elle aurait plus de p chiffres, et ainsi de suite; on finira toujours par trouver comme résultat un nombre formé en écrivant p fois le chiffre 9.

La même propriété s'applique par conséquent à la période, dans le cas d'une fraction périodique simple.

Étendre ce théorème à une base quelconque de numération, après en avoir convenablement modifié l'énoncé.