NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 285-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__285_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 701

(voir 2ᵉ série, t. III, p. 176);

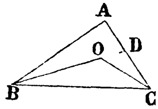
PAR M. LIONNET.

Démontrer, sans admettre aucun postulatum, que l'angle du triangle ayant pour sommets les milieux des côtés d'un triangle équilatéral excède un demi-angle droit.

I. Considérons d'abord les triangles ABC, DBC qui ont un côté et un angle communs. L'angle BDC, extérieur au triangle ABD, étant au moins égal à la somme des angles intérieurs A et ABD, si l'on ajoute de part et d'autre la somme des angles DBC, DCB, on trouve que la somme des angles du triangle DBC est au moins égale à celle des angles du triangle ABC.

Les triangles OBC, DBC ayant aussi un côté et un angle communs, on prouverait de même que la somme des

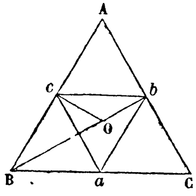
Fig. 1.



angles du premier est au moins égale à celle des angles du second et, à plus forte raison, à celle des angles du triangle ABC. On en conclut ce théorème : *lorsque deux triangles* OBC, ABC *ont un côté commun et que l'un d'eux est intérieur à l'autre, la somme des angles du premier triangle est au moins égale à celle des angles du second.*

II. Considérons les triangles équilatéraux abc, ABC, dont l'un a pour sommets les milieux des côtés de l'autre.

Fig. 2.



La somme des angles d'un triangle étant au plus égale à deux droits, l'angle abc, que nous désignerons par la lettre x, est au plus égal à $\frac{2^{d}}{3}$, et, par suite, chacun des angles égaux Abc, abC est au moins égal à $\frac{2^{d}}{3}$. Cela étant, si l'angle x est inférieur à $\frac{2^d}{3}$, le triangle abc peut être placé dans le triangle Abc, de manière que ces deux triangles aient le côté bc commun; et, en vertu du principe précédent (I), on aura

$$3x > Abc + Acb + A = 2^d - x + A;$$

d'où l'on déduit

$$x > \frac{1^d}{2} + \frac{A}{4};$$

donc, dans tous les cas, *l'angle x excède un demi-angle droit.*

Remarque. — Ce principe est un cas particulier du théorème suivant dont la démonstration ne s'appuie sur aucun postulatum.

III. Théorème. — *L'angle du polygone ayant pour sommets les milieux des côtés d'un polygone régulier excède un demi-angle droit.*

La démonstration étant faite pour un triangle équilatéral (II), supposons que AB et AC (*fig.* 2) soient deux côtés consécutifs d'un polygone régulier P d'un nombre n de côtés supérieur à 3. La droite bc sera l'un des côtés du polygone régulier p ayant pour sommets les milieux des côtés du polygone P. De plus, le point O étant le centre commun des deux polygones, les droites Ob, Oc seront des rayons du polygone p et des apothèmes du polygone P. Enfin on aura l'angle $bOc = \frac{4^d}{n}$ et, en désignant par x l'angle du polygone p,

$$Obc = Ocb = \frac{1}{2}x, \quad Abc = Acb = 1^d - \frac{1}{2}x.$$

Cela étant, si l'angle Obc égale ou excède son complément Abc, l'angle x, double de Obc, égale ou excède un droit et, par conséquent, excède un demi-angle droit.

Si l'angle Obc est moindre que Abc, le triangle Obc peut être placé dans le triangle Abc de manière que ces deux triangles aient le côté bc commun, et, en vertu du principe précédent (I), on a

$$x + \frac{4^d}{n} > 2^d - x + A,$$

d'où l'on déduit

$$x > 1^d - \frac{2^d}{n} + \frac{A}{2}.$$

Or, pour $n =$ ou > 4, la différence $1^d - \frac{2^d}{n}$ égale ou excède $\frac{1^d}{2}$; donc, dans tous les cas, x *excède un demi-angle droit.*

Remarque. — Lorsque, dans la géométrie *non euclidienne* (*), on fait l'hypothèse que la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits, il est facile de démontrer que l'angle d'un polygone régulier de n côtés diminue et tend vers zéro, quand son rayon augmente au delà de toute limite, et que ce même angle augmente et tend vers $2^d - \frac{4^d}{n}$, quand le rayon du polygone diminue et tend vers zéro. Il en résulte que si, par exemple, l'angle du triangle équilatéral ABC est excessivement petit, l'angle du triangle abc excède néanmoins un demi-angle droit, ce qui exige que le rapport des côtés bc, BC tende vers zéro, lorsque le rayon OB et, par suite, le côté BC croissent au delà de toute limite.

(*) On peut consulter une brochure très-intéressante ayant pour titre : *Études geométriques sur la théorie des parallèles*, par Lobatcheffsky, traduite de l'allemand par M. *Hoüel.*