A. LEMONNIER

Démonstration directe de la formule de Moivre, expressions de sin (a+b) et de cos (a+b)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 284-285

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__284_1>

DÉMONSTRATION DIRECTE DE LA FORMULE DE MOIVRE,

EXPRESSIONS DE $\sin(a+b)$ ET DE $\cos(a+b)$;

PAR M. A. LEMONNIER,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Napoléon.

On sait que, si les côtés d'une ligne brisée dans un plan sont les modules d'expressions imaginaires, et leurs angles de direction à l'égard d'une direction initiale les arguments de ces expressions, la somme des expressions a pour module la résultante de la ligne brisée, et pour argument son angle de direction.

Cela subsiste, quand on attribue à des côtés des modules négatifs, pourvu que les arguments se rapportent à des directions opposées à celles des côtés.

Soit considérée une ligne brisée de deux côtés dont les modules soient $\cos b$ et $\sin b$, et les arguments a et $a+\frac{\pi}{2}$; la résultante aura l'unité pour module et la somme $a+b$ pour argument.

Donc on aura

$$\begin{aligned}
&\cos(a+b)+i\sin(a+b)\\
&=\cos b\,(\cos a+i\sin a)+\sin b\left[\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\right]\\
&=\cos b(\cos a+i\sin a)+\sin b(-\sin a+i\cos a)\\
&=\cos b(\cos a+i\sin a)+i\sin b\,(\cos a+i\sin a)\\
&=(\cos b+i\sin b)\,(\cos a+i\sin a).
\end{aligned}$$

C'est la formule de Moivre.

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\cos(a+b)+i\sin(a+b)\\
&\qquad=\cos b\cos a-\sin b\sin a+i(\cos b\sin a+\sin b\cos a).
\end{aligned}$$

Donc

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a.$$