Nouvelles annales de mathématiques

Housel

Intersection d'une surface par un plan

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 277-284

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__277_1>

INTERSECTION D'UNE SURFACE PAR UN PLAN;

PAR M. HOUSEL.

Un plan coupant une surface donnée, nous allons chercher l'équation de l'intersection, rapportée à des axes pris dans le plan même.

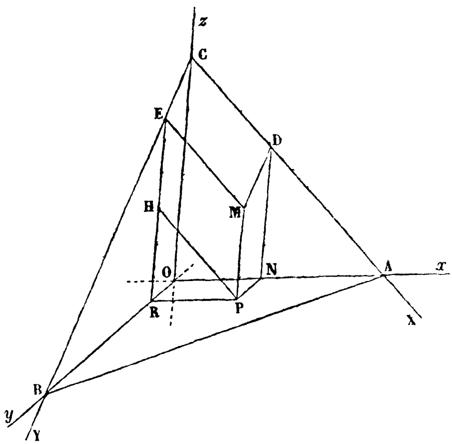
Le plan donné ABC a pour équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = q,$$

en représentant par q la distance de l'origine au plan et par α, β, γ les cosinus de cette distance avec les axes donnés. On sait que

$$\text{OC} = \frac{q}{\gamma},\quad \text{OB} = \frac{q}{\beta},\quad \text{OA} = \frac{q}{\alpha}.$$

Prenons pour axes des coordonnées, dans le plan, les droites CX, CY suivant lesquelles ce plan coupe les plans



des zx et des zy, et soit M un point du plan qui a pour coordonnées, d'un côté

$$\mathrm{MP} = z, \quad \mathrm{PN} = y, \quad \mathrm{ON} = x,$$

et de l'autre

$$\mathrm{CD} = \mathrm{X}, \quad \mathrm{CE} = \mathrm{Y}.$$

On reconnaît facilement la relation

$$\frac{x}{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PH}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{CA}};$$

ce qui, à cause de

$$\overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OC}}^2 - 2\mathrm{OA}.\mathrm{OC} \cos xz,$$

donne

$$\frac{x}{\mathrm{X}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cos xz}},$$

ou bien

$$x = \rho X, \quad \text{en posant} \quad \rho = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cos xz}};$$

de même

$$y = \rho' Y, \quad \text{en posant} \quad \rho' = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos yz}};$$

enfin

$$z = \frac{q - \alpha\rho X - \beta\rho' y}{\gamma}.$$

Substituant dans l'équation de la surface ces trois valeurs de x, de y et de z, on a l'équation en X et Y de la section cherchée.

Pour achever de déterminer le système des coordonnées X et Y, il faut calculer le cosinus de leur angle ACB. Ici

$$\cos XY = \frac{\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2}{2 CA . CB};$$

d'après ce qui précède, on obtient

$$\cos XY = \frac{\rho\rho' [\alpha\beta + \gamma(\gamma \cos xy - \beta \cos xz - \alpha \cos yz)]}{\gamma^2}.$$

Coordonnées rectangulaires. — Dans ce cas, il reste

$$\rho = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, \quad \rho' = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}},$$

$$\cos XY = \frac{\rho\rho' \alpha\beta}{\gamma^2} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \gamma^2)}}.$$

De là on tire

$$\sin XY = \frac{\gamma \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \gamma^2)}} = \frac{\rho\rho' \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}{\gamma},$$

ou bien

$$\sin XY = \frac{\gamma}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2)}} = \frac{\rho\rho'}{\gamma}.$$

APPLICATIONS.

I. *Section d'une surface du second degré.* — On trouve pour équation

$$\begin{aligned}\rho^2 X^2 (A\gamma^2 + A''\alpha^2 - 2B'\alpha\gamma) + \rho'^2 (A'\gamma^2 + A''\beta^2 - 2B\beta\gamma)\\ + 2\rho\rho' XY (B''\gamma^2 - B\alpha\gamma - B'\gamma\beta + A''\alpha\beta)\\ + 2\rho X (C\gamma^2 - C''\alpha\gamma + B'q\gamma - A''q\alpha)\\ + 2\rho' Y (C'\gamma^2 - C''\beta\gamma + Bq\gamma - A''q\beta)\\ + D''\gamma^2 + A''q^2 + 2C''q\gamma = 0;\end{aligned}$$

l'équation de la surface étant

$$\begin{aligned}Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy\\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.\end{aligned}$$

II. D'après cela, on peut résoudre la question 824 (*Nouvelles Annales*, 1867, p. 432), qui consiste à déterminer les quantités $\frac{1}{R_1^2 R_2^2}$ et $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}$, en indiquant par R_1 et R_2 les demi-axes de la conique d'intersection.

De plus, on admet que les axes Ox, Oy, Oz sont rectangulaires ; donc

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

L'équation de l'intersection est

$$aX^2 + a'Y^2 + 2bXY + 2cX + 2c'Y + d = 0,$$

en posant, comme on l'a vu,

$$a = \rho^2 (A\gamma^2 + A''\alpha^2 - 2B'\alpha\gamma) \ldots.$$

Ensuite, quel que soit l'angle XY, on sait que, si l'on pose

$$G = \frac{2bcc' - ac'^2 - a'c^2}{b^2 - aa'} - d^2,$$

et

$$P^2 = (a + a' - 2b\cos XY)^2 + 4(b^2 - aa')\sin^2 XY,$$

on aura

$$\frac{G}{R_1^2} = \frac{a + a' - 2b\cos XY + P}{2\sin^2 XY}, \quad \frac{G}{R_2^2} = \frac{a + a' - 2b\cos XY - P}{2\sin^2 XY},$$

d'où l'on tire

$$G\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) = \frac{a + a' - 2b\cos XY}{\sin^2 XY}, \quad \frac{G^2}{R_1^2 R_2^2} = \frac{aa' - b^2}{\sin^4 XY}.$$

Pour calculer G, nous chercherons d'abord

$$b^2 - aa' = M\gamma^2,$$

en posant

$$\begin{aligned} M = {} & \gamma^2(B''^2 - AA') + \beta^2(B'^2 - AA'') + \alpha^2(B^2 - A'A'') \\ & + 2\alpha\beta(A''B'' - BB') + 2\alpha\gamma(A'B' - BB'') \\ & + 2\beta\gamma(AB - B'B''). \end{aligned}$$

D'après cela, nous arriverons à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & -(G + D\gamma^2)M\gamma^2 \\ & = (A\gamma^2 + A''\alpha^2 - 2B'\alpha\gamma)(C'\gamma^2 - C''\beta\gamma + Bq\gamma - A''q\beta)^2 \\ & \quad + (A'\gamma^2 + A''\beta^2 - 2B\beta\gamma)(C\gamma^2 - C''\alpha\gamma + B'q\alpha - A''q\alpha)^2 \\ & \quad + 2(B\alpha\gamma + B'\beta\gamma - B''\gamma^2 - A''\alpha\beta) \\ & \qquad \times (C\gamma^2 - C''\alpha\gamma + B'q\gamma - A''q\alpha) \\ & \qquad \times (C'\gamma^2 - C''\beta\gamma + Bq\gamma - A'''q\beta) \\ & \quad + M\gamma^2(A''q^2 + 2q\gamma C''). \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de calculer, dans cette égalité, le coefficient de q^2, celui de $2q$ et le terme indépendant. Or, si l'on pose

$$m = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'',$$

$$K = C(A'A'' - B^2) + C'(BB' - A''B'') + C''(BB'' - A'B'),$$

. . . .

on arrivera enfin au résultat suivant

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{G}{\gamma^2}+D\right) M = & \, m q^2 - 2q(K\alpha + K'\beta + K''\gamma) \\
& + \alpha^2 (A''C'^2 + A'C''^2 - 2BC'C'') \\
& + \beta^2 (AC''^2 + A''C^2 - 2B'CC'') \\
& + \gamma^2 (A'C^2 + AC'^2 - 2B''CC') \\
& + 2\alpha\beta\,[C''(BC + B'C' + B''C'') - A''C''C'] \\
& + 2\alpha\gamma\,[C'(BC + B'C' + B''C'') - A'CC''] \\
& + 2\beta\gamma\,[C(BC + B'C' + B''C'') - AC'C''].
\end{aligned}
$$

Nous pouvons donc poser $G = \varphi\gamma^2$, la quantité φ étant connue et symétrique en α, β, γ.

Maintenant on trouvera, après quelques réductions,

$$\frac{1}{R_1^2 R_2^2} = -\frac{M}{\varphi^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\varphi^2}{R_1^2 R_2^2} + M = 0;$$

de même

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right) = & \, \alpha^2(A'+A'') + \beta^2(A''+A) + \gamma^2(A+A') \\
& - 2B\beta\gamma - 2B'\alpha\gamma - 2B''\alpha\beta.
\end{aligned}
$$

M. Painvin écrit le second membre sous la forme

$$A(1-\alpha^2) + A'(1-\beta^2) + A''(1-\gamma^2) - 2B\beta\gamma - 2B'\alpha\gamma - 2B''\alpha\beta,$$

ce qui revient au même, à cause de la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

car

$$1 - \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \ldots.$$

III. *Sections circulaires.* — Dans l'équation de la section plane d'un ellipsoïde représenté par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les coefficients de X^2 et de Y^2 sont

$$\frac{c^2\gamma^2+a^2\alpha^2}{a^2c^2(\gamma^2+\alpha^2)},\qquad \frac{c^2\gamma^2+b^2\beta^2}{b^2c^2(\gamma^2+\beta^2)},$$

et celui de $2XY$ est $\frac{\rho'\alpha\beta}{c^2\gamma^2}$. On aura donc, pour une section circulaire,

$$\frac{c^2\gamma^2+a^2\alpha^2}{c^2a^2(\gamma^2+\alpha^2)}=\frac{c^2\gamma^2+b^2\beta^2}{c^2b^2(\gamma^2+\beta^2)};$$

et aussi, en divisant tout par l'un de ces coefficients égaux,

$$\frac{\varphi\rho'\alpha\beta}{c'\gamma^2}\cdot\frac{a^2c^2(\gamma^2+\alpha^2)}{c^2\gamma^2+a^2\alpha^2}=\cos XY=\frac{\varphi\rho'\alpha\beta}{\gamma^2}.$$

Si l'on supprime, comme cela semble naturel, le facteur commun $\alpha\beta$, il reste

$$\frac{a^2(\gamma^2+\alpha^2)}{c^2\gamma^2+a^2\alpha^2}=1,$$

d'où il faudrait conclure

$$a^2=c^2.$$

L'erreur vient de ce qu'on a eu tort de supprimer les facteurs inconnus α, β; il faut donc supposer que l'un de ces facteurs est nul, ce qui ramène nécessairement aux deux systèmes connus de sections circulaires.

IV. En général, on peut faire, dans le plan sécant, toutes les constructions que l'on voudra, par les calculs de la géométrie à deux dimensions, relativement aux coordonnées X et Y. Ensuite, après avoir obtenu un certain résultat, on pourra revenir à l'espace en posant, pour les points ainsi déterminés

$$X = \frac{x}{\rho}, \quad y = \frac{y}{\rho'},$$

ce qui donnera une relation entre x et y, relation que l'on joindra à l'équation du plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = q.$$

On résoudra ainsi, par exemple, le problème suivant : *Trouver la bissectrice d'un angle donné dans l'espace.*