NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

# De la séparation des racines

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 7 (1868), p. 25-36

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__25_1>

## DE LA SÉPARATION DES RACINES;

PAR M. ABEL TRANSON.

### I.

Soit $F(z)$ une fonction algébrique entière dans laquelle les coefficients des diverses puissances de $z$ sont

(*) Voir *Nouvelles Annales*, 2[e] série, t. III, p. 416 : *Notice sur les fonctions hyperboliques et sur quelques Tables de ces fonctions*, par M. Hoüel.

des constantes quelconques, réelles ou imaginaires. Si on y remplace $z$ par $x + y\sqrt{-1}$, $F(z)$ prendra la forme $P + Q\sqrt{-1}$, où P et Q sont des fonctions algébriques entières et à coefficients réels de $x$ et de $y$.

Si ensuite on considère $x$ et $y$ comme les coordonnées d'un point rapporté à deux axes rectangulaires $ox$ et $oy$ et situé dans le plan de ces axes, il est évident que les coordonnées de chacun des points de rencontre des deux courbes $P = 0$, $Q = 0$, donneront les éléments d'une racine correspondante de l'équation $F(z) = 0$.

« Ces points, disent MM. Sturm et Liouville, représentent en quelque sorte géométriquement les racines de l'équation $F(z) = 0$. (*). » Prouhet les appelait des *points-racines*, et cette dénomination paraît être acceptée dans la science.

Les courbes $P = 0$, $Q = 0$, et plus généralement toutes celles que représente l'équation

$$aP + bQ = 0,$$

où $a$ et $b$ sont des nombres réels quelconques; chacune de ces courbes porte sur son contour tous les points-racines de $F(z) = 0$.

Mon objet est de déterminer le nombre des points-racines contenus sur un arc donné de l'une des deux courbes $P = 0$, $Q = 0$; ou plutôt, c'est de réduire cette détermination à la solution d'une question de calcul, de la même façon que la détermination du nombre des points racines contenus dans l'intérieur d'un contour fermé se trouve réduite aussi, au moyen d'un célèbre théorème de Cauchy, à la réalisation d'un certain calcul.

Je ferai la réduction que j'ai en vue par deux procédés très-différents, et d'abord au moyen de ce théorème de

(*) *Journal de Liouville*, t. I^er, p. 179.

Cauchy auquel je viens de faire allusion. C'est pourquoi il est utile d'en reproduire ici l'énoncé.

THÉORÈME DE CAUCHY. — *Le nombre des points-racines situés dans l'intérieur d'un contour fermé, en supposant qu'il ne s'en trouve aucun sur ce contour même, est égal à la demi-différence entre le nombre des variations descendantes et ascendantes du rapport* $\frac{P}{Q}$ *pour toute l'étendue du contour supposé parcouru dans le sens direct de rotation. Ce nombre est aussi égal à la demi-différence entre les variations ascendantes et descendantes du rapport inverse* $\frac{Q}{P}$.

Dans cet énoncé on entend que la variation d'une quantité est ascendante lorsqu'elle passe du négatif au positif en s'annulant; descendante si elle passe du positif au négatif. D'ailleurs, on n'a pas égard aux changements de signe (variations) résultant des passages par l'infini. Enfin, le sens d'une rotation est appelé direct lorsqu'un observateur parcourant le contour se trouve avoir l'intérieur de ce contour à sa gauche sous la condition toutefois que le même observateur, étant placé à l'origine et regardant le segment positif de l'axe des $x$, ait le segment positif de l'axe des $y$ aussi à sa gauche.

## II.

Supposons qu'il s'agisse de déterminer le nombre des points-racines situés sur un arc donné de la courbe $Q = 0$.

On peut toujours admettre que les extrémités de cet arc ne sont pas des points-racines, et dès lors il est facile de l'enfermer dans un contour qui n'ait sur son périmètre aucun de ces points, et qui, dans son intérieur, n'en contienne pas d'autres que ceux qu'on suppose exister sur ce même arc, par conséquent dans un contour qui fera connaître par l'emploi du théorème de Cauchy le nombre demandé.

Pour former ce contour on prendra sur la normale en chaque point, et de chaque côté de ce point, une longueur $\varepsilon$ suffisamment petite (infiniment petite). On aura formé ainsi une bande de largeur $2\varepsilon$, terminée à ses bouts par deux portions de droites et sur ses côtés par deux arcs *parallèles* à l'arc donné.

Pour que le sens du mouvement soit direct, le premier des deux côtés à parcourir dépendra évidemment de celle des deux extrémités d'où l'on part. Mais quelle que soit cette extrémité il est aisé de voir que, sous la condition que les arcs croissent dans le sens du parcours, l'équation de ce premier côté s'obtiendra en remplaçant dans l'équation de la courbe centrale

$$x \quad \text{par} \quad x - \varepsilon\frac{dy}{ds},$$

$$y \quad \text{par} \quad y + \varepsilon\frac{dx}{ds}.$$

Donc, tout le long de ce côté, le dénominateur de la fraction $\frac{P}{Q}$ à laquelle doit être appliqué le théorème de Cauchy, a pour valeur

$$Q = \varepsilon\left(\frac{dQ}{dx}\frac{dy}{ds} - \frac{dQ}{dy}\frac{dx}{ds}\right)\ldots\ldots,$$

expression où l'on néglige d'écrire les termes qui contiennent des puissances supérieures de $\varepsilon$.

D'ailleurs, on a en chaque point de ce parcours, et toujours en négligeant les infiniment petits,

$$\frac{dQ}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dQ}{dy}\frac{dy}{ds} = 0.$$

A l'aide de cette dernière relation, la fraction $\frac{P}{Q}$ prend la forme

$$\text{(A)}\qquad \frac{P\dfrac{dQ}{dy}}{-\varepsilon\dfrac{dx}{ds}\left[\left(\dfrac{dQ}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dQ}{dy}\right)^2\right]}.$$

Ainsi il y a d'abord à compter la différence du nombre des variations descendantes à celui des ascendantes que la fonction ci-dessus éprouve tout le long du premier côté, soit de $S_1$ à $S_2$.

Si on parcourt les deux bouts rectilignes du contour qui enveloppe l'arc donné, la fonction $\frac{P}{Q}$ passe une fois à chacun de ces bouts par l'infini, mais ne s'évanouit pas; il n'y a donc lieu que d'étudier ce que donne le second contour de la bande, lequel doit être parcouru en sens contraire du premier, c'est-à-dire de $S_2$ à $S_1$.

Nous avons dit que la substitution à faire dans l'équation de la courbe centrale pour avoir l'équation de l'un des bords *parcouru dans le sens direct* est toujours la même quelle que soit l'extrémité d'où l'on part, *pourvu que l'arc croisse dans le sens du parcours;* mais si l'on veut conserver aux accroissements de l'arc le même sens que sur le côté antérieurement parcouru, les substitutions seront de

$$x+\varepsilon\frac{dy}{ds}\quad \text{à la place de}\quad x,$$

$$y-\varepsilon\frac{dx}{ds}\quad \text{à la place de}\quad y;$$

et ainsi on aura à compter le long de ce second côté la différence des variations descendantes aux ascendantes éprouvées par la fonction

$$\frac{P\dfrac{dQ}{dy}}{\cdots + 2\dfrac{dx}{ds}\left[\left(\dfrac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dQ}{dy}\right)^2\right]},$$

ou bien, ce qui est la même chose, éprouvées par cette fonction prise négativement, toutefois en parcourant le second côté, non plus de $S_2$ à $S_1$, mais comme le premier côté de $S_1$ à $S_2$. En effet, si l'on change à la fois le signe de la fonction parcourue et le sens du parcours, les variations ascendantes, comme les descendantes, conservent leurs signes respectifs.

L'excès du nombre des variations descendantes compté sur le contour entier sera donc égal au *double* des descendantes sur les ascendantes éprouvé par la fonction (A), lorsqu'on parcourt seulement le premier côté de la bande d'une extrémité à l'autre. Ce dernier excès pris une seule fois donnera le nombre des points-racines contenus sur l'arc donné.

Observons maintenant qu'on peut supprimer d'abord dans cette expression (A) le facteur constant et positif $\frac{1}{\varepsilon}$ ; et ensuite qu'on peut supposer nulle l'épaisseur de la bande, ce qui revient à annuler effectivement les termes qu'on s'est dispensé d'écrire au numérateur et au dénominateur de l'expression (A), comme renfermant des puissances de $\varepsilon$. Observons aussi qu'on peut changer le signe de cette expression à la condition de changer le signe des variations ; et enfin qu'en vertu de la relation

$$\frac{dQ}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dQ}{dy}\frac{dy}{ds} = 0,$$

qui a lieu en tous les points de l'arc donné, on peut remplacer le facteur

$$\frac{\dfrac{dQ}{dy}}{\dfrac{dx}{ds}\left[\left(\dfrac{dQ}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dQ}{dy}\right)^2\right]}$$

par son équivalent

$$\frac{\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{\left(\dfrac{dQ}{dy}\right)},$$

de sorte que finalement la question que nous avions en vue est résolue par la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Le nombre des points-racines contenus sur un arc déterminé de la courbe* $Q=0$, *lorsque les extrémités de cet arc ne sont pas eux-mêmes de tels points, est égal à la différence du nombre des variations ascendantes et descendantes du rapport* $\dfrac{P\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{\left(\dfrac{dQ}{dy}\right)}$ *pour toute l'étendue de cet arc.*

## III.

La règle qu'on vient de formuler serait illusoire si pour quelque point de l'arc en question le numérateur et le dénominateur devenaient nuls en même temps; par exemple, si l'on avait à la fois $P=0$ et $\dfrac{dQ}{dy}=0$.

Mais on peut écarter cette supposition au moyen des relations bien connues qui existent entre les dérivées partielles des fonctions P et Q, et qui s'ensuivent de l'identité

$$F(z)=F\left(x+y\sqrt{-1}\right)=P+Q\sqrt{-1}.$$

En effet, on déduit de cette identité deux expressions différentes de $F'(z)$, savoir :

$$F'(z)=\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dx}\sqrt{-1}, \quad \text{et} \quad F'(z)=\frac{dQ}{dy}-\frac{dP}{dy}\sqrt{-1};$$

d'où résultent les relations, dont il s'agit, savoir :

$$\frac{dQ}{dy}=\frac{dP}{dx}, \quad \frac{dQ}{dx}=-\frac{dP}{dy},$$

et en même temps deux autres expressions de $F'(z,)$ savoir :

$$F'(z)=\frac{dP}{dx}-\frac{dP}{dy}\sqrt{-1}, \quad \text{et} \quad F'(z)=\frac{dQ}{dy}+\frac{dQ}{dx}\sqrt{-1};$$

d'ailleurs, à cause de la relation déjà utilisée ci-dessus :

$$\left[\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2+\left(\frac{dQ}{dy}\right)^2\right]\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=\left(\frac{dQ}{dy}\right)^2,$$

on ne peut pas supposer $\frac{dQ}{dy}=0$, sans avoir en même temps $\frac{dQ}{dx}=0$, si toutefois on écarte la supposition de $\frac{dx}{ds}=0$.

Or, la supposition que $\frac{dQ}{dy}$ et $\frac{dQ}{dx}$ sont nulles ensemble revient à $F'(z)=0$. D'ailleurs, celle de $P=0$ revient à $F(z)=0$, puisque les variables $x$ et $y$ sont déjà liées par la relation $Q=0$; on aurait donc à la fois $F(z)=0$, et $F'(z)=0$. Donc on évitera le cas d'exception dont il s'agit, lequel mettrait notre règle en défaut, si l'on a le soin de n'opérer que sur des équations $F(z)=0$ à racines simples, ce qui est toujours possible.

La fonction $\dfrac{P\frac{dx}{ds}}{\frac{dQ}{dy}}$ se présenterait encore sous une forme indéterminée si l'on avait $\frac{dx}{ds} = 0$, que P fût d'ailleurs en même temps nul ou différent de zéro, puisque $\frac{dx}{ds}$ ne peut s'annuler qu'avec $\frac{dQ}{dy}$; mais on peut remplacer $\dfrac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dQ}{dy}}$ par $\dfrac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dP}{dy}}$, ce qui lève la difficulté puisqu'on ne peut pas avoir $\frac{dQ}{dy}$ et $\frac{dP}{dy}$, tous les deux nuls à la fois.

*Nota.* — On vient de voir que si $F(z) = 0$ est une équation à racines simples, on ne peut pas avoir à la fois

$$\frac{dP}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dP}{dy} = 0,$$

ni

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{dQ}{dy} = 0.$$

Il suit de là que les courbes $P = 0$, $Q = 0$, et aussi les courbes $aP + bQ = 0$, où $a$ et $b$ seraient des nombres quelconques, ne peuvent avoir aucuns points singuliers proprement dits, et notamment aucuns points isolés, de sorte que, dans cette même supposition des racines simples, on est sûr de rencontrer tous les points-racines en suivant le périmètre de l'une quelconque de ces courbes.

## IV.

La même expression (A) qui convient à la courbe $Q = 0$ est susceptible d'une autre forme qui est très-digne de remarque, parce que nous la retrouverons pour toûtes les courbes $aP + bQ = o$, et parce qu'elle nous conduira à une proposition, d'ailleurs bien connue, relative aux racines réelles des équations dont tous les coefficients sont réels.

Voici ce qu'il en est. Supposons que l'on considère les coordonnées $x$ et $y$ d'un point quelconque de la courbe $Q = o$ comme des fonctions de l'arc $s$ de cette même courbe, on aura d'une part

$$P = \varphi(s),$$

et d'autre part

$$\frac{d\varphi}{ds} = \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dQ}{dy}}{\frac{dx}{ds}};$$

on a donc identiquement

$$\frac{P\,\frac{dx}{ds}}{\frac{dQ}{dy}} = \frac{\varphi(s)}{\varphi'(s)},$$

de sorte que la solution du problème que nous avions en vue s'exprime sous la forme suivante :

Théorème. — *Le nombre des points racines de l'équation* $F(z) = o$ *contenus sur un arc déterminé de la courbe* $Q = o$, *est égal à l'excès du nombre des variations ascendantes sur les descendantes qu'éprouve le rapport* $\frac{\varphi(s)}{\varphi'(s)}$, *lorsqu'on parcourt l'arc donné.*

En reprenant cette question par une autre méthode, je montrerai ultérieurement que les variations du rapport $\frac{\varphi(s)}{\varphi'(s)}$ sont toutes ascendantes, et d'ailleurs il n'échappera pas au lecteur que si $\varphi(s)$ est une fonction rationnelle et entière de $s$, la question analytique à laquelle se trouve reduite la détermination du nombre des points-racines de l'arc donné, se trouve résolue par le théorème de Sturm. Il suffit même, d'après ce qui a été démontré par ce géomètre à propos du théorème de Cauchy sur les contours, que $\varphi(s)$ soit une fonction rationnelle (*).

Si $F(z) = 0$ est une équation à coefficients réels, la fonction Q se décompose en deux facteurs, savoir : $y$ pour le premier, et $f'(x) - \frac{y^2}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$ pour le second. Si l'on cherche les points-racines sur un segment de la ligne $y = 0$, ce qui convient exclusivement aux racines réelles, on aura $x = s$, et le rapport $\frac{\varphi(s)}{\varphi'(s)}$ deviendra $\frac{F(x)}{F'(x)}$; ce qui procure une confirmation de notre théorème.

## V.

Si l'on voulait chercher les points-racines contenus sur un arc donné de la courbe $P = 0$, on imaginerait d'abord un contour enveloppant cet arc et construit de la même façon que celui dont nous avons entouré un arc de la courbe $Q = 0$. Mais ici, pour que les extrémités à bords rectilignes de ce contour ne donnent pas lieu à des variations, on emploiera la seconde forme du théorème de Cauchy, à savoir que *le nombre des points-racines situés dans l'intérieur d'un contour fermé..., est égal à la demi-différence entre les variations ascendantes et descendantes du rapport* $\frac{Q}{P}$.

Et alors, en imitant les calculs précédents, on trouvera que le nombre cherché est égal à l'excès du nombre des variations ascendantes et descendantes qu'éprouve, le long

(*) *Voir* SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, 3e édit., t. Ier, p. 289.

de l'arc donné, la fonction

$$\frac{Q\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dP}{dx}};$$

et de nouveau, si les coordonnées d'un point quelconque de l'arc sont considérées comme fonctions de l'arc lui-même exprimé par $s$, de sorte qu'on puisse représenter Q par $\varphi(s)$, on verra que l'expression précédente équivaut à $\dfrac{\varphi(s)}{\varphi'(s)}$.

## VI.

Enfin, on sera conduit encore à la même règle, si l'on cherche le nombre des points-racines contenus sur un arc d'une des courbes

$$aP + bQ = 0.$$

Il suffit de rappeler la remarque ingénieuse due à M. L. Prouhet, que les racines de

$$(a + b\sqrt{-1}) \quad F(z) = 0$$

étant manifestement les mêmes que celle de $F(z) = 0$, on peut considérer le résultat de la substitution de $x + y\sqrt{-1}$ à $z$ comme donnant

$$aP - bQ + (aQ + bP)\sqrt{-1} = 0.$$

Et, en effet, si on pose

$$aP - bQ = P_1 \quad \text{et} \quad aQ + bP = Q_1,$$

les deux fonctions $P_1$ et $Q_1$ ont entre elles les mêmes relations que P et Q; dès lors les règles pour trouver le nombre des points-racines de $F(z) = 0$ contenus sur des arcs donnés de $P_1 = 0$ ou de $Q_1 = 0$, seront les mêmes (*mutatis mutandis*) que pour des arcs de $P = 0$, ou de $Q = 0$.

(*La suite prochainement.*)