NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Application de l'algèbre directive à la géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 241-264

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__241_0>

APPLICATION DE L'ALGÈBRE DIRECTIVE A LA GÉOMÉTRIE

(voir p. 208);

PAR M. ABEL TRANSON.

VIII.

Je rappellerai donc premièrement de quelle façon M. Poncelet a considéré les rencontres d'un cercle et d'une droite, ou plus généralement d'une section conique et d'une droite.

Si une conique est rencontrée aux points M et N par une droite indéfinie mn, on sait que le milieu ou centre O de la corde MN se trouve à l'intersection de cette droite et du diamètre AB conjugué à sa direction. Le rapport entre le carré de la demi-corde, c'est-à-dire entre $\overline{OM}^2$ ou $\overline{ON}^2$, et le produit des deux segments OA et OB du diamètre demeure le même lorsque, le point O se déplaçant sur AB, la sécante demeure parallèle à elle-même. Si p est la valeur de ce rapport, la relation

$$\overline{OM}^2 = p.OA.OB$$

définit donc la situation des points M et N.

Supposons maintenant une autre droite indéfinie $m'n$ parallèle à mn, mais ne rencontrant pas la conique. Elle rencontrera en un point O' le diamètre AB prolongé. Sur cette droite $m'n'$, et de part et d'autre de O', prenons deux points M' et N' satisfaisant à la relation

$$\overline{O'M'}^2 = \overline{O'N'}^2 = p.O'A.O'B$$

« identique avec celle qui définit les points M et N suivant lesquels la sécante *mn* rencontre réellement la section conique pourvu toutefois qu'on n'ait point égard à la différence de situation des lignes (*) ; on obtiendra une longueur M′N′, divisée également au point O′, et qu'on pourra regarder comme représentant, d'une manière fictive, la corde imaginaire qui correspond à la droite *m′n′* considérée comme sécante de la courbe. » (*Traité des propriétés projectives,* section I, chap. II.)

Le lieu des points M′ et N′ ainsi construits sera une hyperbole ou une ellipse, selon que la conique considérée sera, au contraire, une ellipse ou une hyperbole, et deux sections coniques ainsi conjuguées seront dites *supplémentaires* l'une de l'autre ; enfin, il est bien essentiel de remarquer « qu'une même section conique a une infinité de supplémentaires, correspondant à l'infinité de systèmes de diamètres conjugués qui lui appartiennent. » (*Ibid.*)

Assurément voilà des grandeurs géométriques qui, en un certain sens, *représentent*, comme dit l'auteur, *les cordes imaginaires de la conique ;* et les géomètres savent que de cette représentation M. Poncelet a tiré des solutions aussi faciles qu'élégantes de quelques-uns des problèmes les plus importants de la théorie des sections coniques ; par exemple, la solution du problème très-important de transformer un système de deux coniques en un système de deux cercles. Mais la question est de savoir si cette représentation, très-utile dans une théorie particulière, a bien la généralité qu'il faut pour correspondre aux propriétés algorithmiques du symbole $a + b\sqrt{-1}$; par conséquent si elle est propre à *réaliser*

(*) Puisqu'en ayant égard à cette situation, l'un des deux segments du diamètre deviendrait négatif.

ce symbole; par conséquent si elle peut sous ce rapport entrer en comparaison avec la *théorie des nombres directifs*.

Or M. Poncelet construit la conique supplémentaire relative à un diamètre déterminé de la conique primitive en plaçant sur ce diamètre une suite d'ordonnées parallèles au diamètre qui lui est conjugué ; variant ainsi à chaque fois, c'est-à-dire pour chaque conique supplémentaire, l'angle sous lequel il construit la grandeur qui est affectée du signe $\sqrt{-1}$; en un mot, accommodant la représentation de l'imaginaire aux conditions successives de son problème. D'ailleurs, l'auteur a donné sur ce point toute sa pensée dans son dernier ouvrage, en affirmant que « le coefficient algorithmique $\sqrt{-1}$ n'est point exclusivement le signe de la *perpendicularité ;* mais qu'il peut aussi bien représenter l'obliquité des droites dirigées sous un angle d'inclinaison quelconque » (*Applications d'Analyse et de Géométrie ;* t. II, p. 244); et en avouant qu'il lui serait « bien difficile de s'expliquer rationnellement que M. Cauchy ait appuyé de son autorité une interprétation si exclusive du signe $\sqrt{-1}$ ». (*Ibid.*)

C'est, qu'eu égard à la théorie des sécantes idéales, M. Poncelet n'avait nullement à se préoccuper de la condition que doit remplir une grandeur géométrique pour être vraiment représentée par le symbole $\sqrt{-1}$, condition qui est de donner pour résultat l'unité négative -1 lorsqu'on la soumet à une opération équivalente à l'opération algébrique de l'élévation au carré; ni de la condition à remplir pour représenter une racine déterminée de l'unité, etc., etc.

Mais autant il serait déplacé de reprocher à la théorie des sécantes idéales l'absence de conditions qui s'y trouveraient sans objet, autant le serait-il de ne pas accepter ces mêmes conditions comme le *criterium* d'une théorie qui a la prétention de réaliser les symboles qu'on a jusqu'ici universellement attribués à l'imaginaire.

Aussi lorsque dans une récente critique du calcul directif, critique que fort inconsidérément on a voulu abriter sous l'autorité de M. Poncelet, on dit que la règle adoptée par les inventeurs de la nouvelle doctrine est de « représenter les grandeurs imaginaires par des perpendiculaires à l'axe sur lequel se comptent les grandeurs réelles » (*Les Mondes*, février 1868), on commet une première méprise, puisque précisément il s'agit de représenter les imaginaires par des longueurs *obliques* à cet axe, notamment toute grandeur imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ par l'hypoténuse du triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit les lignes a et b. Et ensuite lorsqu'on affirme (*ibid.*) qu'il n'y a « aucune importance » à placer la ligne b perpendiculairement à a, on commet une méprise plus grave encore; car supposons, par exemple, $a = b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; la quantité algébrique $a + b\sqrt{-1}$ est alors l'une des racines quatrièmes de l'unité négative, et la grandeur géométrique qui lui correspond selon la théorie en question, c'est un chemin égal à l'unité inclinée de 45 degrés sur la direction positive. En effet, cette unité inclinée, si on la multiplie trois fois par elle-même, tournera trois fois de 45 degrés dans le sens de la rotation directe, d'après le principe fondamental de la multiplication appliquée aux nombres directifs; et alors elle se trouvera couchée sur la direction négative, ce qui prouve bien que, dans sa situation première, elle est réellement une des racines quatrièmes de l'unité négative. Mais si l'on prétend qu'il n'y a « aucune importance » à diriger perpendiculairement le terme affecté du signe $\sqrt{-1}$, je demande qu'on l'incline ici sous tel angle qu'on voudra autre que l'angle droit, et qu'ensuite on explique comment le troisième côté du triangle ou bien toute autre ligne de la figure pourra représenter la racine quatrième de l'unité!...

Le *principe de continuité* de M. Poncelet, autant que sa *théorie des sécantes idéales*, est absolument étranger à l'objet du calcul directif. En effet, lorsqu'une figure géométrique dans un état général de construction présente des parties qui peuvent généralement exister ou n'exister pas, il arrive que leur présence dans le premier cas peut servir à démontrer des propriétés permanentes de la figure, c'est-à-dire des propriétés qui subsistent lorsque ces mêmes parties n'existent pas; ou bien, au contraire, il peut arriver que les propriétés permanentes soient plus faciles à démontrer en l'absence des parties contingentes. Le *principe de continuité* consiste à admettre que la démonstration faite pour l'un des deux états de la figure est valable pour l'autre, et il y a sans doute quelque analogie entre cette manière d'envisager les relations d'une figure indépendamment de l'existence ou de la non-existence de quelques-unes de ses parties, et le maniement algébrique des équations, qui se fait de son côté indépendamment de la nature particulière de leurs racines. Mais enfin, le *principe de continuité* est de pure géométrie; il appelle *imaginaires* certaines parties des figures lorsque ces parties cessent d'exister, *cessent d'être réelles*. Au lieu que la théorie que j'expose ici (d'après Argand, etc.) est une théorie d'Algèbre qui a pour objet de faire voir que *toutes les racines des équations algébriques sont constructibles, c'est-à-dire réelles.*

Les théories de M. Poncelet étant mises ainsi hors de cause, je prie le lecteur de remarquer que, grâce au calcul directif, les règles concernant les quantités négatives et celles qui concernent les quantités imaginaires se trouvent identifiées. Ainsi la multiplication entre nombres directifs ayant pour effet de faire tourner le multiplicande d'un angle égal à celui du multiplicateur, afin que le produit soit composé avec l'un des deux facteurs comme l'autre l'est avec l'unité, il s'ensuit nécessairement tout le détail de ce qu'on appelle *la règle des signes*, et par exemple que *moins par moins donne plus*. En effet, l'angle du multiplicateur *moins un*, étant de 180 degrés, il faut que l'angle du multiplicande *moins un*, qui est aussi de 180 degrés, s'augmente d'autant pour *donner* le produit, ce qui amène celui-ci à 360 degrés, c'est-à-dire à *plus un*. On a ainsi un produit dans la direction positive, c'est-à-dire un produit dirigé en sens contraire du multiplicande, parce que le multiplicateur est dirigé en sens contraire de l'unité (positive), c'est-à-dire un produit composé avec le multiplicande comme le multiplicateur est composé avec l'unité; etc.

IX.

Maintenant il me reste à montrer que la réalisation des imaginaires proposée par Argand, Français, Mourey, bien loin d'être en contradiction avec l'emploi que M. Chasles a fait des imaginaires dans son *Traité de Géométrie supérieure*, conduit nécessairement aux mêmes résultats, mais à la vérité par une route différente.

Ceci nécessite quelques explications préliminaires.

Dans la *division homographique* d'une droite, il y a à considérer deux points, appelés *points doubles*, dont la détermination dépend d'une équation du second degré. Les racines de cette équation peuvent être réelles ou bien imaginaires, et par conséquent, selon l'idée généralement reçue, les points doubles peuvent *exister ou ne pas* *exister.* Dans le premier cas, leurs relations avec les autres points de la figure permettent de démontrer plusieurs des propriétés les plus importantes de la division homographique, et dès lors, en vertu du *principe de continuité* proposé par M. Poncelet, on pourrait induire que ces propriétés subsistent dans le second cas, c'est-à-dire quand les racines de l'équation dont il s'agit sont imaginaires. Mais M. Chasles évite l'emploi de ce principe en établissant ces mêmes propriétés de la division homographique, non sur la réalité des deux points doubles, réalité qui constitue une circonstance *contingente* de la figure, mais sur des circonstances *absolues* et *permanentes*, c'est à savoir sur ce qu'il appelle les *éléments* de ces points, éléments représentés par les coefficients de l'équation du second degré dont ils dépendent, et par conséquent éléments toujours réels.

De cette méthode, dont l'emploi bien évidemment n'est pas restreint à la question que je viens d'indiquer, son auteur a pu dire avec vérité qu'*elle participe aux avantages propres à l'analyse* (*Géom. sup.*, préf., p. II). Elle possède en effet « la généralité dont sont empreints tous les résultats de la Géométrie analytique, où l'on ne fait acception, ni des *différences de positions relatives* des diverses parties d'une figure, ni des circonstances de *réalité* ou *d'imaginarité* des parties qui, dans la construction générale de la figure, peuvent être indifférement réelles ou imaginaires ». (*Ibid.*)

Mais quoi! les résultats de cette méthode par rapport à la division homographique seront-ils amoindris? leur importance et leur beauté seront-elles diminuées, si l'on fait voir qu'en dépit du préjugé algébrique les points doubles existent encore lorsque les racines de l'équation dont ils dépendent ont la forme dite imaginaire? bien plus! si l'on fait voir que dans ce cas-là aussi bien que dans celui des formes dites *réelles*, ils peuvent servir directement à démontrer les propriétés de la division homographique !

Je crois qu'au jugement de tout esprit droit cette épreuve sera décisive. A la vérité, pour l'accomplir entièrement, il faudrait montrer d'abord que les notions du rapport anharmonique et du rapport harmonique, celles de la division homographique et de l'involution, ne conviennent pas exclusivement à des points situés en ligne droite, mais s'étendent aussi à des points distribués sur un plan. Ceci offrirait l'occasion d'une importante application de l'algèbre directive; car toutes les relations que la *Géométrie supérieure* établit entre les segments d'une droite, les transformations qu'elle fait subir à ces relations et les théorèmes qu'elle en déduit; ces relations, ces transformations, ces théorèmes recevraient du calcul directif une interprétation concernant les chemins entre les points d'un même plan. Mais tandis que les théorèmes relatifs à des segments qui sont couchés tous sur une même droite ne peuvent résulter que du calcul, les théorèmes correspondants relatifs à des lignes polygonales, outre qu'ils se présenteraient, eux aussi, comme des résultats de calcul, seraient en même temps des *propriétés de figures*, et par conséquent seraient susceptibles d'acquérir par des démonstrations géométriques une évidence intuitive.

Quelque intérêt que puisse avoir la question envisagée ainsi dans son ensemble, comme son développement m'entraînerait dans de trop longs détails, je vais considérer certaines relations entre des points distribués sur un plan, mais en me restreignant aux notions indispensables pour établir la conclusion que j'ai en vue.

(§ 1). *Du rapport anharmonique de quatre points.* — Quatre points a, b, c, d, *situés sur un plan*, donnent lieu à six chemins ; l'expression $\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$, qui est formée de quatre de ces six chemins, est ce que nous appellerons le *rapport anharmonique* des quatre points ; c'est *le rapport des distances de l'un de ces points à deux des autres, divisé par le rapport des distances du quatrième point à ces deux-là* (*G. S.*, 7)*.

Le lecteur doit entendre qu'un chemin comme *ac* est mesuré par un nombre directif qui implique à la fois, conformément à nos définitions, une longueur et un angle de direction. Si les points a, b,... sont déterminés par leurs distances à une origine O, un chemin tel que ac est la différence des nombres directifs Oc, Oa. Le rapport des deux chemins ac, ad, implique un angle que j'appelle ω_1 et qui est égal à la différence des inclinaisons de ac et de ad sur la direction positive. Pareillement ω_2 sera l'angle directeur du rapport $\frac{bc}{bd}$, c'est-à-dire la différence des inclinaisons de bc et de bd ; de sorte que finalement le rapport anharmonique $\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$ aura un angle directeur ε égal à la différence $\omega_1 - \omega_2$.

D'après cela, c'est-à-dire à cause des angles qu'elles contiennent implicitement, nos formules, quoique identiques dans la forme avec celles de la *Géométrie supérieure*, en différeront essentiellement, à moins cependant qu'on ne remarque qu'entre des chemins situés sur une même droite les angles sont toujours de 0° ou de 180°, et que ces angles entre deux chemins sont marqués par les signes *plus* ou *moins* qui affectent leurs rapports.

(§ 2). *Des divisions homographiques.* — Si l'on a mar-

(*) Lisez : *Géométrie supérieure*, § 7. C'est ainsi que nous indiquerons la correspondance entre nos énoncés et les énoncés analogues du livre de M. Chasles.

qué *sur deux plans* des points qui se correspondent un à un, tellement que le rapport anharmonique de quatre points quelconques de l'un soit égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants de l'autre, nous dirons que ces deux plans sont divisés *homographiquement*, ou bien que leurs points correspondants forment deux *divisions homographiques* (*G. S.*, 99).

L'homographie des deux divisions est établie aussitôt qu'à trois points du premier plan déterminés par les nombres directifs a, b, c, on a fait correspondre trois points a', b', c', pris arbitrairement sur le second plan. Car en appelant x et y les deux nombres qui correspondent à deux nouveaux points homologues, on devra avoir la relation

$$\frac{x-a}{x-b} : \frac{y-a'}{y-b'} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{c'-a'}{c'-b'},$$

équation qui détermine la situation d'un quatrième point y du second plan, lorsqu'un quatrième x est donné sur le premier. D'ailleurs, si après avoir développé cette équation, on y ramène le coefficient du terme en xy à l'unité, elle prend la forme

$$(1) \qquad xy + \lambda x + \mu y + \nu = 0.$$

Or il est facile de voir que si l'on appelle x_1, x_2, x_3, x_4 les nombres directifs qui déterminent quatre points quelconques du premier plan, et y_1, y_2, y_3, y_4 les nombres relatifs à quatre points du second plan déterminés par l'équation ci-dessus, le rapport anharmonique

$$\frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_4} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_4}$$

des quatre derniers est égal au rapport anharmonique des quatre premiers.

L'équation (1) est la même que celle de la *G. S.*, 131, avec la différence qu'ici x et y mesurent des chemins inclinés, et que les coefficients λ, μ, ν, ne sont pas nécessairement des quantités de la forme dite *réelle*. Ce sont des nombres directifs quelconques; ils peuvent donc avoir la forme dite *imaginaire*.

Sans diminuer la généralité de cette conception, nous pouvons supposer que les deux plans coïncident; ou en d'autres termes, nous pouvons considérer sur un même plan deux systèmes de points se correspondant un à un de manière à y former deux divisions anharmoniques. L'équation (1) représente alors une transformation algébrique dont nous définirons facilement la nature en faisant préalablement disparaître les termes du premier degré, et cela en portant l'origine des x au bout du chemin $-\mu$, et l'origine des y au bout du chemin $-\lambda$. La relation entre les nouveaux x et y sera alors

$$(2) \qquad xy = \lambda\mu - \nu.$$

Et maintenant, si l'on fait glisser sur le plan sans tourner l'une des deux divisions, par exemple celle des y, de manière que son origine vienne coïncider avec celle des x, l'équation (2) subsistera et sera très-facile à interpréter par les principes du calcul directif; car premièrement les chemins correspondants x et y seront inclinés également de part et d'autre du chemin marqué par $\lambda\mu - \nu$; et comme le produit de leurs longueurs est constant, si l'on fait tourner l'une des deux divisions autour de la direction de $\lambda\mu - \nu$ jusqu'à la rabattre sur l'autre, deux chemins correspondants quelconques seront alors deux *rayons vecteurs réciproques*.

(§ 3). *Détermination géométrique des constantes λ, μ, ν.* — La signification des coefficients de l'équation (1) se détermine comme dans la théorie relative aux divisions homographiques d'une droite.

O étant l'origine commune des x et des y, soit OI le chemin qui, dans le système des x, correspond à une valeur infinie de y; et soit OJ' le chemin qui, dans le système des y, correspond à une valeur infinie de x, on trouvera

$$\mathrm{OI} + \mu = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{OJ'} + \lambda = 0.$$

Ensuite, si OA' est la valeur de y qui correspond à l'origine O considérée comme appartenant au système des x, c'est-à-dire la valeur de y correspondant à $x = 0$; et de même, si OB est la valeur de x correspondant à $y = 0$, on trouvera indifféremment

$$\nu = \mathrm{OI}.\mathrm{OA'}; \quad \text{ou bien} \quad \nu = \mathrm{OJ'}.\mathrm{OB}.$$

L'équation (1) devient alors la suivante (*G. S.*, 136) :

$$xy - \mathrm{OJ'}.x - \mathrm{OI}\,y + \mathrm{OI}.\mathrm{OA'}\ (\text{ou } \mathrm{OJ'}.\mathrm{OB}) = 0.$$

(§ 4). Détermination des POINTS DOUBLES. — *Lorsque deux plans divisés homographiquement sont superposés, il existe deux points dont chacun, considéré comme appartenant à l'une des divisions, coïncide avec son homologue dans l'autre division.* — Chacun de ces deux points est ce que l'on appelle un *point double* (*G. S.*, 151).

Pour les déterminer, remarquons que si deux points homologues coïncident, on a $x = y$; et par suite

$$x^2 + (\lambda + \mu)x + \nu = 0,$$

équation qui donne deux valeurs de x. Il y a donc deux points, et seulement deux, qui satisfont à la question.

Le milieu des deux points doubles est aussi le milieu *des deux points* I *et* J′ *qui, dans les deux divisions, correspondent à l'infini* (*G. S.*, 152).

En effet, le milieu de la ligne qui joint les points doubles est déterminé par le chemin

$$x_1 = -\frac{\lambda + \mu}{2},$$

ou, en remplaçant les constantes par leurs valeurs,

$$x_1 = \frac{\mathrm{OJ}' + \mathrm{OI}}{2}.$$

Mais il faut remarquer que généralement la ligne qui joint les points doubles ne coïncide pas avec celle des points J′ et I. Pour connaître la situation relative de ces droites, imaginons qu'on ait placé l'origine commune des x et des y au point milieu de la ligne qui joint les points J′ et I. Il faut alors supposer dans les équations précédentes $\lambda = -\mu$, et par conséquent $\mathrm{OJ}' = -\mathrm{OI}$. D'ailleurs, les points A′ et B *relatifs à l'origine actuelle* sont aussi placés à égale distance de part et d'autre de cette origine, c'est-à-dire qu'on a maintenant $\mathrm{OA}' = -\mathrm{OB}$; et il vient, pour la détermination des points doubles D, indifféremment

$$\mathrm{OD} = \pm\sqrt{\mathrm{OI}.\mathrm{OB}}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{OD} = \pm\sqrt{\mathrm{OJ}'.\mathrm{OA}'}.$$

Donc l'origine actuelle est à la fois le *point milieu* de trois droites, savoir :

de la ligne des points I et J′ ;
de la ligne des points B et A′ ;
de la ligne des points doubles.

De plus, cette dernière est bissectrice des deux autres. Cela résulte des valeurs de OD trouvées ci-dessus et interprétées d'après les principes du calcul directif.

Donc, si les deux premières lignes se confondent, ce qui arrive quand les coefficients λ, μ, ν, sont de forme dite *réelle* (positifs ou négatifs), la troisième se confond avec elles ou bien leur est perpendiculaire, selon que les points I et B (ou bien les points J′ et A) sont du même côté de O, ou de part et d'autre de ce point ; car dans le premier cas l'angle IOB est nul ; et dans le second il est égal à deux droits.

Pour exprimer *le cas où l'un des points doubles est à l'infini*, il faut, dans notre équation (1) du (§ 2), attribuer au premier terme un coefficient qui, pour le cas en question, s'évanouit. Alors cette équation (1) s'abaissant au premier degré exprimera, comme nous l'avons expliqué précédemment, une *transformation par similitude*. (*G. S.*, 157.)

Et pour *le cas où les deux points doubles sont à l'infini*, notre même équation (1) devrait avoir la forme

$$x - y + \nu_1 = 0,$$

et alors deux chemins homologues des deux plans seraient toujours égaux (*G. S.*, 169).

(§ 5). L'équation de l'homographie, quand l'origine commune des chemins homologues est, comme nous le supposons, au milieu des points I et J′, peut s'écrire comme il suit :

$$xy + \mathrm{OI}(x - y) - \overline{\mathrm{OD}}^2 = 0,$$

et alors il est bien aisé d'étendre à l'homographie du plan ce théorème de l'homographie de la droite :

Le rapport des distances d'un point de la première division aux deux points doubles est au rapport des distances du point correspondant de la seconde division aux deux mêmes points, dans une raison constante (*G. S.*, 153).

Cela résulte en effet du calcul suivant :

$$\frac{x-\mathrm{OD}}{x+\mathrm{OD}}:\frac{y-\mathrm{OD}}{y+\mathrm{OD}}=\frac{xy+\mathrm{OD}(x-y)-\overline{\mathrm{OD}}^2}{xy-\mathrm{OD}(x-y)-\overline{\mathrm{OD}}^2}=\frac{\mathrm{OI}-\mathrm{OD}}{\mathrm{OI}+\mathrm{OD}}.$$

Supposons le cas où les coefficients λ, μ, ν sont des nombres positifs ou négatifs; alors le nombre $\frac{\mathrm{OI}-\mathrm{OD}}{\mathrm{OI}+\mathrm{OD}}$ est lui-même positif ou négatif, et le lecteur reconnaîtra aisément que, dans ce cas, le quadrilatère formé par les deux points doubles et par deux points homologues quelconques X et Y est toujours inscriptible.

(§ 6). Conservant toujours la même origine, j'écris l'équation de l'homographie sous les formes suivantes :

$$(x-\mathrm{OI})(y-\mathrm{OJ}')=\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{OI}}^2=(\mathrm{OD}-\mathrm{OI})(\mathrm{OD}-\mathrm{OJ}');$$
$$\mathrm{IX}.\mathrm{J}'\mathrm{Y}=\mathrm{ID}.\mathrm{J}'\mathrm{D},$$

et j'en déduis premièrement l'équation différentielle

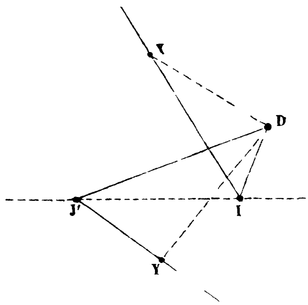
$$\frac{dx}{x-\mathrm{OI}}=-\frac{dy}{y-\mathrm{OJ}'},\quad\text{ou bien}\quad\frac{dx}{\mathrm{IX}}=-\frac{dy}{\mathrm{J}'\mathrm{Y}},$$

d'après laquelle on voit que, si l'extrémité du chemin x décrit une droite passant par le point I, l'extrémité du chemin correspondant y décrira une autre droite passant par le point J'.

Les directions relatives de deux telles droites sont déterminées par l'équation de l'homographie, et leur relation est simplement que l'une de leurs bissectrices est parallèle au chemin exprimé par le nombre directif $\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{OI}}^2$. Ce sont donc des droites *conjuguées* par couples. Or voici une des plus belles propriétés des points doubles ; c'est que

De chaque point double on voit, sous des angles *égaux et formés dans le même sens de rotation, tous les segments qui joignent deux points homologues relatifs à un même couple de droites conjuguées.*

En effet, soient X et Y deux points homologues sur les droites conjuguées IX et J'Y, et D l'un des points doubles.



De la seconde des deux équations ci-dessus, on tire

$$\frac{\mathrm{IX}}{\mathrm{ID}} = \frac{\mathrm{J'D}}{\mathrm{J'Y}},$$

d'où résulte la similitude des deux triangles IDX, J'YD; car Mourey, qui a poussé beaucoup plus loin qu'Argand et Français l'étude du nouveau calcul, a très-bien fait voir que l'égalité des rapports directifs entre deux côtés homologues de deux triangles suffit pour exprimer leur similitude, parce que cette condition implique à la fois la proportionnalité des côtés et l'égalité des deux angles compris.

On a donc aussi l'égalité $\frac{\mathrm{DX}}{\mathrm{DI}} = \frac{\mathrm{YD}}{\mathrm{YJ'}}$, qu'on peut écrire sous cette autre forme

$$\frac{\mathrm{DX}}{\mathrm{DY}} = \frac{\mathrm{DI}}{\mathrm{J'Y}};$$

or l'angle directeur du second membre de cette équation est constant, puisque le point Y est censé décrire la droite J'Y; donc, etc.

(§ 7). Application des résultats précédents aux *divisions homographiques formées sur une même droite*.

D'après ce qui précède, la théorie des divisions homographiques formées sur une même droite peut être envisagée sous un point de vue qui justifie nos précédentes assertions; car nous savons maintenant que, si l'équation à coefficients de la forme dite *réelle*

$$xy + \lambda x + \mu y + \nu = 0$$

exprime deux divisions homographiques d'une même droite lorsqu'on donne à l'une des variables une valeur arbitraire de cette même forme, c'est parce qu'elle possède la même signification à l'égard de la totalité du plan lorsqu'on attribue à l'une des variables une valeur directive quelconque;

De sorte que des points homologues de cette droite ne peuvent avoir aucune propriété corrélative qui n'existe également entre des points homologues du plan;

Et que, comme il existe dans les deux divisions correspondantes du plan deux points doubles qui régissent en un certain sens la corrélation de deux points homologues quelconques de ce plan, ces mêmes points doubles ne peuvent jamais manquer de régir la corrélation entre deux points homologues de la droite, qu'ils soient d'ailleurs placés sur la droite elle-même ou bien hors de cette droite;

Enfin la forme dite *réelle* qu'affectent les coefficients de l'équation ci-dessus entraîne, pour les deux divisions du plan, des conséquences dont quelques-unes ont été déjà signalées ci-dessus et qui expliquent les propriétés des deux divisions de la droite.

Par exemple, nous savons que, dans les conditions actuelles, la ligne des deux points I et J′ coïncide avec celle des deux points qui sont, dans le système des x et dans celui des y respectivement, les deux transformants du point milieu du segment IJ′. Or nous avons remarqué que, dans une telle circonstance, les points doubles sont, ou bien sur cette droite, ou bien sur une perpendiculaire à cette droite, et, dans l'un comme dans l'autre cas, à égale distance de part et d'autre du point O. Aussi lorsque ces points, conformément aux idées reçues, sont réputés ne pas exister parce que l'équation qui les donne a ses racines imaginaires, le calcul directif nous les fait trouver précisément sur cette perpendiculaire.

De plus, le lecteur rattachera aisément à la propriété des points doubles du plan, signalée dans le précédent paragraphe, le beau théorème formulé comme il suit :

Quand deux divisions homographiques formées sur une même droite n'ont pas de points doubles, il existe, de part et d'autre de cette droite, un point d'où l'on voit sous des angles égaux et formés dans le même sens de rotation tous les segments compris entre les points de la première division et leurs homologues respectifs. (*G. S.*, 171.)

C'est que, dans la circonstance actuelle (définie par la nature des coefficients λ, μ, ν), la ligne des deux points J′ et I représente en direction l'une des bissectrices de chacun des couples de droites que nous avons appelées *droites conjuguées*; droites dont l'une, comme nous l'avons vu, passe toujours par le point J′ et l'autre par le point I. Il y a donc un de ces couples dont les deux droites tombent ensemble sur la ligne J′I. Ce sont ces deux droites superposées dont l'équation générale, ci-dessus reproduite, représente l'homographie, et par conséquent les segments entre leurs points homologues doivent être vus des points doubles du plan sous des angles égaux. Or les deux points signalés de part et d'autre de la droite doublement divisée sont précisément *les deux points doubles de la division du plan*. N'hésitons donc pas à y reconnaître les points doubles de la droite elle-même.

(§ 8). *Autres applications.* — Je pourrais encore appliquer ce qui précède à faire voir que, *si l'on donne sur un plan deux droites; sur la première droite trois points a, b, c, et sur la seconde droite trois autres points a', b', c', il existe sur ce plan deux points d'où l'on aperçoit sous des angles égaux les trois segments aa', bb',* cc', ce qui est la généralisation du beau théorème de la *G. S.*, 173.

Je pourrais donner une solution géométrique du célèbre problème de la SECTION DÉTERMINÉE (*G. S.*, 281) étendu au plan, et, par conséquent, énoncé comme il suit: *Étant donnés quatre points sur un plan, déterminer sur ce plan un cinquième point tel, que le produit de ses distances à deux des quatre points donnés soit au produit de ses distances aux deux autres dans une raison donnée.*

Je pourrais étendre la belle démonstration géométrique du principe d'algèbre relatif à la *décomposition des fractions rationnelles en fractions simples* (*G. S.*, 317 et suiv.) au cas où les deux polynômes (numérateur et dénominateur) ne sont pas décomposables en facteurs réels du premier degré; au cas même où leurs coefficients sont quelconques, c'est-à-dire de forme imaginaire; et alors on verrait bien que cette ingénieuse démonstration géométrique, pour atteindre à la généralité que comporte le théorème d'algèbre, doit supposer la représentation des imaginaires algébriques par les chemins inclinés de la géométrie.

Je pourrais aussi, à l'aide du calcul directif, étudier les relations qui existent entre quatre points situés sur un plan lorsque leur rapport anharmonique est égal à -1. Et alors on verrait toutes les relations qui ont lieu entre quatre points formant sur une droite une *proportion harmonique* se transfigurer en autant de propriétés d'un quadrilatère qu'on pourrait appeler *quadrilatère harmonique*.

Avec cette notion du quadrilatère harmonique, je pourrais montrer que, si l'on a deux divisions homographiques sur un plan, on peut, comme pour le cas d'une droite, *construire le conjugué harmonique d'un point par rapport aux deux points doubles, sans connaître ces points doubles*.

Je pourrais étendre au plan la *Théorie de l'Involution*, étude très-intéressante, parce qu'ici, à l'aide du calcul directif, je retrouverais les propriétés de la *transformation par rayons vecteurs réciproques*.

Je pourrais aussi trouver matière à d'autres applications très-nombreuses du calcul directif dans un important Mémoire publié autrefois sur ce sujet par M. Siebeck, et signalé récemment par M. Hoüel à l'attention des géomètres (*).

Et si quelqu'un pensait que tant de théorèmes déjà démontrés à l'aide du calcul directif ne sont pas en assez grand nombre pour qu'on puisse oser se permettre de prendre parti en faveur de ce calcul, aussi longtemps que quelque sommité scientifique n'aura pas donné l'exemple de l'introduire dans toutes les parties de l'Algèbre, comme déjà Cauchy l'avait introduit dans la théorie des fonctions (*voir* l'article *Séparation des racines*, *Nouvelles Annales*, janvier 1868), je pourrais dire à cet esprit circonspect

(*) Geometrische Bedeutung imaginärer Zahlen (*Journal de Crelle*, 1858).

que peut-être il n'en est pas des Mathématiques comme des Sciences Empiriques, où en effet la vérité plus ou moins probable d'un principe dépend du nombre de ses applications; mais enfin je demanderais qu'on fixât le nombre d'applications qui est nécessaire en sciences rationnelles pour établir la validité d'un principe, car la théorie directive serait certainement en mesure de fournir le nombre voulu.

X.

Je place ici, à la fin de cette exposition, et pour lui servir de résumé, un sommaire où les résultats se suivent dans leur ordre logique.

Sommaire. — Idée du nombre directif; c'est le nombre abstrait, impliquant à la fois longueur et direction, et, par là, devenu apte à mesurer tout segment de droite tracé sur un plan dans une direction déterminée. — Opérations élémentaires du calcul appliquées aux nombres directifs. — Sommes et produits. — La multiplication fait tourner. — L'angle directeur d'un produit est égal à la somme des angles de ses facteurs. — Règle des signes des produits quand les facteurs n'ont pas d'autres inclinaisons que 0° ou 180°, ou autrement lorsqu'ils sont positifs ou négatifs.

Équations algébriques à une seule inconnue. — L'équation du premier degré dont les coefficients sont positifs ou négatifs est résolue par un nombre dont l'angle directif ne peut être que 0° ou 180°; — l'équation du second degré à coefficients quelconques a pour racines deux nombres directifs. — Les racines de l'équation binôme de degré m sont toutes d'égale longueur; si on les place à partir d'un centre commun selon leurs directions propres, elles partagent l'aire du cercle en m parties égales, figurant ainsi la roue d'un char. — Démonstrations intuitives : 1° du principe que toute équation a une racine; 2° du principe des substitutions et du principe de Rolle; ces deux principes étant d'ailleurs appliqués à des équations dont les coefficients sont quelconques (directifs); 3° du théorème de Cauchy sur le nombre des points-racines contenus dans un contour donné; 4° d'un théorème analogue sur le nombre des points-racines contenus sur certains arcs de courbes; 5° de ce que tout polynôme algébrique entier de degré m en x, x étant la distance entre un point variable du plan et l'origine, représente le produit des distances de ce point variable à m points fixes.

Application de l'algèbre directive à la géométrie; — et d'abord à des problèmes déterminés. — Les problèmes les plus élémentaires et les plus anciennement résolus n'ont jamais été discutés complétement et ne pouvaient pas l'être avant l'invention du calcul directif, puisque la forme imaginaire était présumée ne pouvoir répondre à aucune grandeur. — On discute un problème qui donne lieu à l'équation générale du second degré, et l'on fait voir qu'une telle équation a toujours deux racines réelles.

L'équation entre deux variables directives ne correspond pas à un lieu déterminé; — c'est le symbole d'une transformation de figures parce que, chacune des variables représentant un chemin tracé à partir d'une origine fixe, si l'on fait parcourir une figure déterminée à l'extrémité de l'une d'elles, l'extrémité de l'autre tracera une figure correspondante, ou plusieurs, selon le degré de l'équation. — L'équation du premier degré entre deux variables représente une transformation par similitude. — Démonstration d'un théorème relatif aux centres de similitude. — Quel que soit le degré d'une transformation algébrique, la région infiniment petite autour d'un point transformant est semblable à la région infiniment petite autour du point transformé. — Donc les angles de la figure transformée se conservent dans la figure transformante, et cela particularise ces sortes de transformations. — Propriétés nouvelles des trajectoires d'un système de coniques confocales obtenues par le moyen du calcul directif. — Le calcul directif résout par de simples éliminations certaines questions qui paraissaient ressortir directement au calcul intégral. — Ainsi, non-seulement le calcul directif établit l'unité de la science en comblant cette sorte d'abîme qu'on supposait exister entre les racines dites *réelles* et les racines dites *imaginaires*, mais, de plus, il offre à la science des ressources nouvelles.

La substitution des nombres directifs aux nombres imaginaires fait disparaître de l'enseignement des mathématiques ce que Gergonne appelle des *non-sens*, ce que M. Hoüel appelle des *compensations d'absurdités*, ce que M. Duhamel déclare être des *symboles dénués de toute signification* et qu'on ne peut soumettre aux opérations du calcul qu'*en se gardant bien d'attacher à ces opérations aucun sens.*

A la vérité, deux illustres géomètres ont déjà fait en géométrie un usage étendu des imaginaires, sans avoir recours au principe du nombre directif; et alors y a-t-il vraiment nécessité de prendre parti en faveur de ce principe? — Les théories de M. Poncelet, notamment les *Sécantes idéales*, les *Coniques supplémentaires* et le *Principe de continuité* n'ont aucun rapport avec l'algèbre directive; l'illustre auteur du *Traité des propriétés projectives des figures* ne s'est jamais proposé de trouver une grandeur géométrique dont toutes les propriétés correspondraient à celles du symbole des imaginaires et qui, en conséquence, serait apte à réaliser ce symbole. — M. Chasles a véritablement fait en géométrie un usage étendu des imaginaires, puisqu'il fait intervenir dans ses démonstrations ce qu'il appelle les *éléments* des racines imaginaires, c'est-à-dire leurs fonctions symétriques; mais ses résultats peuvent être invoqués en faveur de la représentation des racines par des nombres inclinés. — En effet, à l'aide du calcul directif, on étend à des points situés sur un plan la théorie des divisions homographiques, et alors on est conduit à reconnaître que *les points doubles* de deux divisions homographiques d'une droite existent dans tous les cas, c'est-à-dire lors même que les racines de l'équation qui les détermine ont la forme des quantités dites *imaginaires*.

Post-scriptum. — Au moment où je corrige les épreuves de ce dernier article, on signale à mon attention deux Mémoires de M. Möbius insérés au *Journal de Crelle*, en 1856, dans lesquels l'illustre auteur du *Calcul barycentrique* étudie les propriétés du double rapport formé avec quatre segments pris parmi ceux qui unissent deux à deux quatre points situés d'une manière quelconque sur un plan. Et comme il fait correspondre ces segments aux formes imaginaires de l'algèbre, il trouve que leurs relations ont les mêmes expressions algorithmiques que celles des segments en ligne droite. Cela le conduit à étudier la figure que, dans les indications succinctes données ci-dessus, j'ai appelée le *quadrilatère harmonique* et à donner quelques-unes des propriétés de ce que j'ai appelé *la double division homographique du plan.*

A ces résultats de M. Möbius, ajoutez la publication de Scheffler (der situation-kalkul, *Brunswick*, 1851); le très-beau Mémoire de Siebeck (*Journal de Crelle*, 1858); d'autres indications encore données dans l'ouvrage récent de M. Hoüel; et d'après cela reconnaissez que si, à la vérité, la théorie du calcul directif a été proposée en France depuis bien longtemps (1813, 1828), et proposée par des géomètres très-peu illustres, Français, Argand, Mourey, d'autre part elle a été depuis lors retrouvée par des géomètres étrangers dont quelques-uns jouissent d'un grand renom; que par eux elle n'a pas été *dédaignée* (se rappeler la recommandation de Gergonne); que par leurs travaux elle a reçu de grands développements et des applications utiles... et qu'ainsi elle réunit maintenant les conditions que doit offrir toute idée nouvelle pour être accueillie sans difficulté parmi nous.

FIN.