NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 221-228

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__221_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 548

(voir t XIX, p 405);

PAR M. NEUBERG,
Professeur à l'Athénee royal d'Arlon (Belgique).

Une conique passant par trois points A_1, A_2, A_3 *touche une droite* B. *Appelons* δ_1, δ_2, δ_3 *les distances respectives de ces trois points à la droite* B; ρ_1, ρ_2, ρ_3 *leurs distances au foyer* F, *et* a_1, a_2, a_3 *leurs distances mutuelles. On a la relation*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta_1^{\frac{1}{2}}[(\rho_2-\rho_3)^2-a_1^2]^{\frac{1}{2}}+\delta_2^{\frac{1}{2}}[(\rho_3-\rho_1)^2-a_2^2]^{\frac{1}{2}}\\ &\qquad+\delta_3^{\frac{1}{2}}[(\rho_1-\rho_2)^2-a_3^2]^{\frac{1}{2}}=0 \quad (*).\end{aligned}\right.$$

(Capitaine FAURE.)

Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées des trois points A_1, A_2, A_3 rapportées à des axes rectangulaires quelconques passant par le foyer F. Désignons

(*) L'equation (1) presentait une faute d'impression que le defaut d'homogeneite faisait facilement decouvrir.

par X_r, Y_r, Z_r les dérivées du déterminant

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \text{où} \quad z_1 = z_2 = z_3 = 1,$$

prises par rapport aux éléments x_r, y_r, z_r, et posons (*)

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = xX_1 + yY_1 + zZ_1, \\ \alpha_2 = xX_2 + yY_2 + zZ_2, \quad \text{où} \quad z = 1. \\ \alpha_3 = xX_3 + yY_3 + zZ_3, \end{cases}$$

Les équations des droites $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ seront

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0,$$

et celle de B peut être supposée sous la forme

$$M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + M_3 \alpha_3 = 0.$$

Comme le premier membre de cette dernière se réduit à $2M_1 S$, $2M_2 S$, $2M_3 S$ quand on y remplace les coordonnées courantes par celles des points A_1, A_2, A_3, les coefficients M_1, M_2, M_3 sont proportionnels aux distances de ces points à la droite B, et l'équation de celle-ci peut aussi s'écrire

$$(3) \qquad \delta_1 \alpha_1 + \delta_2 \alpha_2 + \delta_3 \alpha_3 = 0.$$

Une conique circonscrite au triangle $A_1 A_2 A_3$ peut être représentée par

$$(4) \qquad N_1 \alpha_2 \alpha_3 + N_2 \alpha_3 \alpha_1 + N_3 \alpha_1 \alpha_2 = 0,$$

(*) Les quantites α_1, α_2, α_3 representent, au signe près, les doubles des surfaces des triangles MA_2A_3, MA_3A_1, MA_1A_2, où M est suppose un point variable $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$. Elles constituent un système de coordonnees trilitères qui est tres-utile dans une foule de questions, parce qu'on en peut passer facilement aux coordonnees cartesiennes, et *vice versa*. Aux sommets du triangle de reference, deux de ces coordonnees sont nulles et la troisieme est egale a $2S$.

et la condition (*) de toucher B sera

$$\Sigma N_1^2 \delta_1^2 - 2\Sigma N_1 N_2 \delta_1 \delta_2 = 0,$$

ou, plus simplement,

$$\sqrt{N_1 \delta_1} + \sqrt{N_2 \delta_2} + \sqrt{N_3 \delta_3} = 0. \tag{5}$$

Nous déterminerons les paramètres N_1, N_2, N_3 en identifiant l'équation (4) avec l'équation focale

$$x^2 + y^2 = (mx + ny + hz)^2.$$

Pour cela, on peut tirer x, y, z des équations (2), ce qui donne

$$x = \frac{\Sigma \alpha_1 x_1}{2S}, \quad y = \frac{\Sigma \alpha_1 y_1}{2S}, \quad z = \frac{\Sigma \alpha_1 z_1}{2S},$$

et l'équation focale peut prendre la forme

$$\Sigma^2 \alpha_1 x_1 + \Sigma^2 \alpha_1 y_1 = \Sigma^2 \alpha_1 (mx_1 + ny_1 + hz_1), \tag{6}$$

ou

$$\Sigma \alpha_1^2 [x_1^2 + y_1^2 - (mx_1 + ny_1 + hz_1)^2]$$
$$+ 2\Sigma \alpha_1 \alpha_2 [x_1 x_2 + y_1 y_2 - (mx_1 + ny_1 + hz_1)(mx_2 + ny_2 + hz_2)] = 0.$$

On en conclut

$$0 = x_1^2 + y_1^2 - (mx_1 + ny_1 + hz_1)^2, \ldots, \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned} N_1 &= 2(x_2 x_3 + y_2 y_3) \\ &\quad - 2(mx_2 + ny_2 + hz_2)(mx_3 + ny_3 + hz_3), \ldots, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Les équations (7) donnent

$$mx_1 + ny_1 + hz_1 = \rho_1, \ldots,$$

et comme l'on a aussi

$$a_1^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2 - 2(x_2 x_3 + y_2 y_3), \ldots,$$

(*) Cette condition peut s'obtenir en eliminant, par exemple, α_3 entre les équations (3) et (4) et en exprimant que le premier membre de la résultante est un carré parfait en α_1 et α_2.

ou

$$2(x_2x_3 + y_2y_3) = \rho_2^2 + \rho_3^2 - a_1^2, \ldots,$$

on trouve pour les valeurs de N

$$N_1 = (\rho_2 - \rho_3)^2 - a_1^2, \ldots,$$

et par suite l'équation (5) devient (*)

$$\Sigma\sqrt{\delta_1[(\rho_2 - \rho_3)^2 - a_1^2]} = 0.$$

C. Q. F. D.

En supposant la conique conjuguée au triangle $A_1A_2A_3$, les équations (4), (5), (7) et (8) seront remplacées par le suivantes :

$$(4') \qquad P_1\alpha_1^2 + P_2\alpha_2^2 + P_3\alpha_3^2 = 0,$$

$$(5') \qquad \frac{\delta_1^2}{P_1} + \frac{\delta_2^2}{P_2} + \frac{\delta_3^2}{P_3} = 0,$$

$$(7') \qquad P_1 = \rho_1^2 - (mx_1 + ny_1 + hz_1)^2, \ldots,$$

$$(8') \qquad 0 = \rho_{12} - (mx_1 + ny_1 + hz_1)(mx_2 + ny_2 + hz_2),$$

où l'on a posé $\rho_{12} = x_1x_2 + y_1y_2, \ldots$.

En résolvant les équations (8′) par rapport aux trinômes $mx_1 + ny_1 + hz_1, \ldots$, et en portant les valeurs obtenues dans les égalités (7′), on aura

$$P_1 = \rho_1^2 - \frac{\rho_{12}\rho_{13}}{\rho_{23}}, \ldots.$$

La règle de multiplication des déterminants fait voir que

$$P_1 = \frac{1}{\rho_{23}}\begin{vmatrix} x_1x_1 + y_1y_1 & x_1x_3 + y_1y_3 \\ x_2x_1 + y_2y_1 & x_2x_3 + y_2y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho_{23}}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

(*) On sait qu'il existe quatre coniques passant par trois points donnés et ayant un foyer donné. Ici ces coniques sont caractérisées par les signes qu'il faut attribuer aux quantités ρ_1, ρ_2, ρ_3. Il faut supposer ces trois quantités positives, ou deux positives et la troisième négative.

ou

$$P_1 = -\frac{Z_2 Z_3}{\rho_{23}}, \ldots.$$

Par suite, l'équation (5') donne

$$(1') \qquad \Sigma \delta_1^2 Z_1 \rho_{23} = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma \delta_1^2 Z_1 (\rho_2^2 + \rho_3^2 - a_1^2) = 0.$$

En remarquant que les triangles $A_2 F A_3, \ldots$, donnent

$$a_1^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2 - 2\rho_2\rho_3 \cos\left(\widehat{\rho_2, \rho_3}\right), \ldots,$$

$$Z_1 = 2 \text{ fois surface } A_2 F A_3 = \rho_2\rho_3 \sin\left(\widehat{\rho_2, \rho_3}\right), \ldots.$$

la relation (1') peut aussi se mettre sous la forme

$$\Sigma \frac{\delta_1^2}{\rho_1^2} \sin 2\left(\widehat{\rho_2, \rho_3}\right) = 0.$$

Les équations (4) et (4'), où l'on remplace N et P par leurs valeurs, donnent aussi lieu aux propositions suivantes :

Une conique circonscrite ou conjuguée à un triangle $A_1 A_2 A_3$ *passe par un point* A. *Appelons* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *les doubles des aires des triangles* $A A_2 A_3$, $A A_3 A_1$, $A A_1 A_2$; ρ_1, ρ_2, ρ_3 *les distances des points* A_1, A_2, A_3 *au foyer* F, *et* a_1, a_2, a_3 *les côtés du triangle* $A_1 A_2 A_3$. *On a les relations*

$$\frac{(\rho_2 - \rho_3)^2 - a_1^2}{\alpha_1} + \frac{(\rho_3 - \rho_1)^2 - a_2^2}{\alpha_2} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2 - a_3^2}{\alpha_3} = 0,$$

$$\frac{\rho_1^2 \alpha_1^2}{\sin 2\left(\widehat{\rho_2, \rho_3}\right)} + \frac{\rho_2^2 \alpha_2^2}{\sin 2\left(\widehat{\rho_3, \rho_1}\right)} + \frac{\rho_3^2 \alpha_3^2}{\sin 2\left(\widehat{\rho_1, \rho_2}\right)} = 0.$$

Supposons enfin la conique inscrite au triangle

$A_1 A_2 A_3$. On peut la représenter par l'équation

$$(4'')\quad \begin{cases} K_1^2 \alpha_1^2 + K_2^2 \alpha_2^2 + K_3^2 \alpha_3^2 \\ \quad - 2K_1 K_2 \alpha_1 \alpha_2 - K_2 K_3 \alpha_2 \alpha_3 - 2K_3 K_1 \alpha_3 \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

ou, plus simplement, par

$$\sqrt{K_1 \alpha_1} + \sqrt{K_2 \alpha_2} + \sqrt{K_3 \alpha_3} = 0,$$

et la condition de toucher la droite $\delta_1 \alpha_1 + \delta_2 \alpha_2 + \delta_3 \alpha_3 = 0$ est

$$(5'')\qquad \frac{K_1}{\delta_1} + \frac{K_2}{\delta_2} + \frac{K_3}{\delta_3} = 0.$$

Les coefficients K_1, K_2, K_3 pourraient encore s'obtenir en identifiant les équations ($4''$) et (6). Mais on les détermine plus facilement en exprimant que la conique ($4''$) touche les droites imaginaires menées par le foyer

$$x \pm y\sqrt{-1} = 0.$$

Comme cette dernière équation, par la substitution $x = \dfrac{\Sigma \alpha_1 x_1}{2S}$, $y = \dfrac{\Sigma \alpha_1 y_1}{2S}$, devient

$$\Sigma \alpha_1 (x_1 \pm y_1 \sqrt{-1}) = 0,$$

il suffira de remplacer dans l'équation ($5''$) δ_1, δ_2, δ_3 par $x_1 \pm y_1\sqrt{-1}$, $x_2 \pm y_2\sqrt{-1}$, $x_3 \pm y_3\sqrt{-1}$. En chassant les dénominateurs et en égalant à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, on aura

$$\Sigma K_1 (x_2 x_3 - y_2 y_3) = 0, \quad \Sigma K_1 (x_2 y_3 + x_3 y_2) = 0.$$

Par conséquent K_1, K_2, K_3 sont proportionnels aux mineurs du système d'éléments

$$\begin{vmatrix} x_2 x_3 - y_2 y_3 & x_3 x_1 - y_3 y_1 & x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_2 y_3 + x_3 y_2 & x_3 y_1 + x_1 y_3 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{vmatrix};$$

mais

$$\begin{vmatrix} x_3 x_1 - y_3 y_1 & x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 & x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= - \rho_1^2 Z_1, \text{ etc.},$$

on peut donc écrire

$$A_1 = \rho_1^2 Z_1 = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \times \rho_1 \sin \left(\widehat{\rho_2, \rho_3} \right), \quad A_2 = \ldots,$$

et les relations entre le foyer d'une conique inscrite au triangle $A_1 A_2 A_3$ et un point ou une tangente quelconques de cette courbe seront

$$\Sigma \sqrt{\rho_1^2 Z_1 \alpha_1} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma \frac{\rho_1^2 Z_1}{\delta_1} = 0$$

ou

$$\Sigma \sqrt{\rho_1 \alpha_1 \sin \left(\widehat{\rho_2, \rho_3} \right)} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma \frac{\rho_1 \sin \left(\widehat{\rho_2, \rho_3} \right)}{\delta_1} = 0.$$

Question 811

(voir 2ᵉ série, t. VI, p. 240);

PAR M. E. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

Nommons S *un groupe quelconque de termes consécutifs dans le développement de* $(1-x)^i$, *où l'exposant* i *est négatif, ou bien un groupe quelconque de termes consécutifs à coefficients positifs dans le développement de* $(1+x)^i$, *où* i *est positif; écrivons* S *sous la forme* $x^k \sum$, $\sum$ *sera ou une quantité qui ne change jamais son signe quel que soit* x, *ou une telle quantité multipliée par un binôme du premier degré.*

La même proposition aura lieu pour un groupe quelconque de termes consécutifs dans le développement de l'exponentielle e^x. (SYLVESTER.)

Considérons le développement de $(1-x)^i$, où i est égal à $-j$, j étant positif :

$$1+jx+\frac{j(j+1)}{1.2}x^2+\frac{j(j+1)(j+2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

Et soit :

$$\begin{aligned} S=&\frac{j(j+1)(j+2)\ldots(j+k-1)}{1.2.3\ldots(k-1)k}x^k+\ldots\\ &+\frac{j(j+1)(j+2)\ldots(j+k+n-1)}{1.2.3\ldots(k+n)}x^{k+n}.\end{aligned}$$

L'équation $S=0$, a k racines nulles, et n différentes de 0. Il s'agit de démontrer que parmi ces n dernières, il y en a au plus une réelle. La $k^{ième}$ dérivée de S est

$$\begin{aligned} j(j+1)\ldots(j+k-1)\Bigg[&1+\frac{j+k}{1}x+\frac{(j+k)(j+k+1)}{1.2}x^2+\ldots\\ &+\frac{(j+k)(j+k+1)\ldots(j+k+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)n}x^n\Bigg].\end{aligned}$$

Cette dérivée égalée à 0, a n ou $(n-1)$ racines imaginaires suivant que n est pair ou impair (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. V, p. 520). Une équation a autant de racines imaginaires qu'une quelconque de ses dérivées; par conséquent, parmi les n racines de $S=0$, différentes de 0, il y en a au plus une qui soit réelle.

C. Q. F. D.

Par un raisonnement identique on voit que la même proposition s'applique au développement de e^x, et à celui de $(1+x)^i$, arrêté au premier terme à coefficient négatif.

Note. — M. Ledoux, élève du lycée de Douai, a résolu la même question à peu près de la même manière.