G. BATTAGLINI

Sur la géométrie imaginaire de Lobatcheffsky

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 209-221

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__209_0>

SUR LA GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE DE LOBATCHEFFSKY;

PAR M. G. BATTAGLINI (*).

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, juin 1867.

Giornale di Matematiche, t. V, p. 217.

La publication récente de la traduction française d'un opuscule de Lobatcheffsky (**) a appelé l'attention des mathématiciens sur le système de Géométrie fondé par Lobatcheffsky, sous le nom de *Géométrie imaginaire* (***),

(*) Nous avons profité, dans notre traduction, de quelques developpements qui nous ont ete communiques par l'auteur.

L'orthographe que nous avons adoptee pour le nom de *Lobatcheffsky* est celle que le geomètre russe a employee lui-même dans son dernier ouvrage, publie en français à Kasan. J. H.

(**) *Études géométriques sur la Théorie des parallèles*, par N. LOBATCHEFFSKY. Traduit de l'allemand par J. Houel. Paris, Gauthier-Villars, 1866. — Prix : 2 fr. 50 c.

(***) *Nouveaux principes de Géométrie, avec une Théorie complète des parallèles* (*Mémoires de l'Université de Kasan*, 1835-38) (en langue russe).

Géométrie imaginaire (*Ibid.*, 1835; en russe. — Un abrege de ce Memoire a paru dans le *Journal de Crelle*, t. XVII, 1837).

Pangéométrie, ou Précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles (Kasan, 1855; en français). — Ce Memoire vient d'être traduit en italien par M Battaglini (*Giornale di Matematiche*, t. V, p. 273-336). — Prix : 8 fr.

Dès l'annee 1826, Lobatcheffsky avait fait connaître les resultats de ses recherches dans une dissertation lue le 12 fevrier devant l'Universite de Kasan, et intitulee : *Exposition succincte des principes de la Géométrie, avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles.* Il a publie depuis, en 1829 et en 1830, des articles sur le même sujet dans le *Courrier de Kasan*.

Ces resultats, que Gauss possedait depuis longtemps, coincident avec ceux auxquels parvenait, vers la même epoque, le geometre hongrois J. Bolyai.

en prenant pour base une théorie des parallèles différente de la théorie *euclidienne* ordinaire.

Dans cette Note, j'ai cherché à établir directement le principe qui sert de base à la *nouvelle* théorie des parallèles, et à parvenir ainsi, par une autre voie que Lobatcheffsky, aux formules qui expriment les relations entre les parties d'un triangle dans la Géométrie imaginaire.

I

Si, pour indiquer une position déterminée de la droite indéfinie Ω, mobile autour d'un point p du plan P, nous convenons d'employer le symbole

$$\Omega_z = \Omega_0 \, F(z),$$

z désignant *la grandeur de la rotation* effectuée par la droite mobile, pour passer d'une position initiale arbitraire Ω_0 à la position actuelle Ω_z, et F étant la caractéristique d'une fonction encore inconnue; nous aurons

$$\Omega_x = \Omega_0 \, F(x), \quad \Omega_y = \Omega_0 \, F(y),$$
$$\Omega_z = \Omega_x \, F(z-x) = \Omega_y \, F(z-y).$$

On en conclura, pour déterminer la fonction F, la relation

$$F(x) \, F(z-x) = F(y) \, F(z-y),$$

ou, si l'on fait $x = 0$, en remarquant que $F(0) = 1$, et que l'on change ensuite z en $x + y$,

$$(1) \qquad F(x+y) = F(x) F(y).$$

En différentiant cette équation par rapport à x et à y, et désignant par k une constante, réelle ou imaginaire, il viendra

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{F'(y)}{F(y)} = \frac{F'(z)}{F(z)} = k,$$

d'où l'on tire, e étant la base des logarithmes naturels,

$$F(z) = e^{kz} = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2 z^2}{1.2} + \frac{k^3 z^3}{1.2.3} + \dots.$$

Si l'on fait tourner la droite Ω indéfiniment autour du point p dans le plan P, cette droite repassera périodiquement par une position donnée quelconque. Cette propriété donne le moyen de déterminer la constante k, contenue dans la valeur de F (z). La fonction e^{kz} ne pouvant reprendre périodiquement les mêmes valeurs, pour z réel, tant que k n'est pas une *imaginaire pure*, nous sommes conduits à remplacer k par ik, i désignant $\sqrt{-1}$, et à poser, par conséquent,

$$F(z) = e^{ikz}.$$

Appelons : *cosinus circulaire* et *sinus circulaire* de z *par rapport à la base* k les expressions

$$\cos z = 1 - \frac{k^2 z^2}{1.2} + \frac{k^4 z^4}{1.2.3.4} - \dots,$$

$$\sin z = \frac{kz}{1} - \frac{k^3 z^3}{1.2.3} + \frac{k^5 z^5}{1.2.3.4.5} - \dots;$$

tangente circulaire et *cotangente circulaire* de z les fonctions

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

On aura

$$e^{ikz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-ikz} = \cos z - i \sin z,$$

$$e^{2ikz} = \frac{1 + i \operatorname{tang} z}{1 - i \operatorname{tang} z} = \frac{\cot z + i}{\cot z - i},$$

relations d'où l'on tire facilement les expressions connues de

$$\cos(x+y), \ \sin(x+y), \ \operatorname{tang}(x+y), \ \cot(x+y).$$

Soit 2π la valeur de kz qui donne

$$e^{2i\pi} = \cos\frac{2\pi}{k} + i\sin\frac{2\pi}{k} = 1;$$

$\frac{2\pi}{k}$ sera la *période* de la fonction e^{ikz}. En remarquant que l'on tire de la condition précédente

$$e^{i\pi} = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i,$$

on aura, pour toute valeur entière, positive ou négative, de n,

$$\cos(2n+1)\frac{\pi}{2k} = 0, \quad \sin 2n\frac{\pi}{2k} = 0.$$

On en conclut les expressions suivantes, sous forme de produits infinis,

$$(2)\quad \begin{cases} \cos z = \left(1 - \dfrac{4k^2z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{4k^2z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{4k^2z^2}{25\pi^2}\right)\cdots, \\ \sin z = kz\left(1 - \dfrac{k^2z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{k^2z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{k^2z^2}{9\pi^2}\right)\cdots. \end{cases}$$

En faisant dans la seconde $kz = \frac{\pi}{2}$, on en tire

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots},$$

d'où

$$\pi = 3,14159\ldots$$

En prenant pour *unité de rotation* de la droite Ω autour du point p dans le plan P, le quart de la rotation qui ramène *pour la première fois* la droite à sa position initiale, on aura $\frac{2\pi}{k} = 4$, d'où $k = \frac{\pi}{2}$. La quantité z, dans les formules précédentes, sera la *mesure* de l'angle compris entre les droites Ω_0 et Ω_z, rapporté à l'angle droit pris pour unité. Pour plus de simplicité dans les formules, nous supposerons $k = 1$, ce qui revient à prendre pour unité angulaire l'angle droit divisé par le nombre $\frac{\pi}{2}$.

On parvient aux mêmes résultats, lorsque l'on convient d'indiquer par le symbole $\Omega_z = \Omega_0 \mathrm{F}(z)$ une position déterminée d'un plan Ω, mobile autour de la droite l, z étant la *grandeur de la rotation* effectuée par le plan mobile pour passer de la position initiale Ω_0 à la position actuelle Ω_z. Si l'on suppose, comme tout à l'heure, $k = 1$, z sera la mesure de l'angle compris entre les plans Ω_0 et Ω_z, cet angle étant rapporté à une unité égale à l'angle dièdre droit divisé par $\frac{\pi}{2}$.

Indiquons maintenant par le symbole

$$\omega_z = \omega_0 \mathrm{F}(z)$$

une position déterminée du point ω, mobile sur une droite donnée L, z étant *la grandeur de la translation* du point mobile passant de la position initiale ω_0 à la position actuelle ω_z. Nous aurons encore ici l'équation (2). Mais, comme le point, en s'avançant indéfiniment sur la droite L, ne repasse plus périodiquement par une quelconque de ses anciennes positions, nous ne pourrons plus déterminer comme précédemment la constante k, que nous conserverons sous sa forme indéterminée.

Appelons : *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* de z, *par rapport à la base* k, les expressions

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{Ch}\, z &= 1 + \frac{k^2 z^2}{1.2} + \frac{k^4 z^4}{1.2.3.4} + \ldots, \\ \mathrm{Sh}\, z &= \frac{kz}{1} + \frac{k^3 z^3}{1.2.3} + \frac{k^5 z^5}{1.2.3.4.5} + \ldots; \end{aligned} \right.$$

tangente hyperbolique et *cotangente hyperbolique* de z les fonctions

$$\mathrm{Th}\,z = \frac{\mathrm{Sh}\,z}{\mathrm{Ch}\,z}, \quad \mathrm{Coth}\,z = \frac{\mathrm{Ch}\,z}{\mathrm{Sh}\,z}.$$

On aura

$$e^{kz} = \mathrm{Ch}\,z + \mathrm{Sh}\,z, \quad e^{-kz} = \mathrm{Ch}\,z - \mathrm{Sh}\,z,$$

$$e^{2kz} = \frac{1 + \mathrm{Th}\,z}{1 - \mathrm{Th}\,z} = \frac{\mathrm{Coth}\,z + 1}{\mathrm{Coth}\,z - 1},$$

relations d'où l'on tire facilement les expressions de

$$\mathrm{Sh}\,(x + y),\ \mathrm{Ch}\,(x + y),\ \mathrm{Th}\,(x + y),\ \mathrm{Coth}\,(x + y).$$

En général, on passe des fonctions circulaires aux fonctions hyperboliques, ou *vice versa,* au moyen des formules

$$\cos z = \mathrm{Ch}\,i\,\frac{z}{k}, \qquad i \sin z = \mathrm{Sh}\,i\,\frac{z}{k},$$

$$i \tan z = \mathrm{Th}\,i\,\frac{z}{k}, \quad -i \cot z = \mathrm{Coth}\,i\,\frac{z}{k}.$$

Tandis que les fonctions circulaires ont la période *réelle* 2π, les fonctions hyperboliques ont la période *imaginaire* $2i\frac{\pi}{k}$.

La quantité z est ici la mesure du segment compris entre les points ω_0 et ω_z, rapporté à un segment *arbitraire* pris pour unité. Si l'on supposait, pour plus de simplicité, $k = 1$, cela reviendrait à prendre pour unité de segment l'unité primitive divisée par le constante k.

II.

Cela posé, considérons, dans un plan, le système des points ω d'une droite fixe L, et le système des droites Ω qui joignent ces points à un point fixe p. Si m, n sont deux positions fixes de ω, et M, N les positions correspondantes de Ω, alors, pour toute position déterminée de ω (ou de Ω), le rapport $\frac{\mathrm{Sh}\, m\omega}{\mathrm{Sh}\, \omega n}$ $\left(\text{ou le rapport } \frac{\sin \mathrm{M}\Omega}{\sin \Omega \mathrm{N}}\right)$ aura une valeur *unique*, positive ou négative; et réciproquement, pour une valeur donnée, positive ou négative, de l'un ou de l'autre de ces deux rapports, le point ω ou la droite Ω prendront une position *unique et déterminée*. En observant donc qu'à chaque position de ω correspond *une seule* position de Ω, et réciproquement, on en conclut que chacun de ces deux rapports

$$r = \frac{\mathrm{Sh}\, m\omega}{\mathrm{Sh}\, \omega n}, \quad \mathrm{R} = \frac{\sin \mathrm{M}\Omega}{\sin \Omega \mathrm{N}},$$

est une fonction *uniforme* de l'autre, c'est-à-dire qu'à chaque valeur de l'un d'eux correspond une valeur *unique et déterminée de l'autre.*

Par conséquent, d'après les principes connus de la théorie générale des fonctions (*), chacune des quantités r et R doit être une fonction rationnelle de l'autre, ce qui exige que ces deux quantités soient liées par une équation algébrique du premier degré par rapport à chacune d'elles, et, par suite, de la forme

$$(4) \qquad \alpha r \mathrm{R} + \beta r + \gamma \mathrm{R} + \delta = 0,$$

α, β, γ, δ étant des coefficients constants. Mais lorsqu'on fait coïncider respectivement la droite Ω et le point ω soit avec M et m, soit avec N et n, on a : dans le premier cas,

$$\mathrm{Sh}\, m\omega = 0, \quad \sin \mathrm{M}\Omega = 0, \quad r = \mathrm{R} = 0,$$

d'où résulte

$$\delta = 0;$$

(*) *Voyez* Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions doublement périodiques*, livre I, chap. IV.

dans le second cas

$$\mathrm{Sh}\,\omega n = 0, \quad \sin \Omega \mathrm{N} = 0, \quad r = \mathrm{R} = \infty,$$

d'où résulte

$$\alpha = 0.$$

Donc l'équation (4) doit se réduire à la forme

$$\beta r + \gamma \mathrm{R} = 0,$$

ou, en désignant par λ la constante $-\frac{\gamma}{\beta}$, à la forme

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{Sh}\, m\omega}{\mathrm{Sh}\,\omega n} = \lambda \frac{\sin \mathrm{M}\Omega}{\sin \Omega \mathrm{N}}.$$

Supposons les points m et n à égale distance du pied o de la perpendiculaire O abaissée du point p sur la droite L, et par suite les droites M et N également inclinées sur la droite O. On aura $\lambda = 1$, de sorte qu'en posant

$$o\omega = \theta, \quad \mathrm{O}\Omega = \Theta,$$

l'équation (5) deviendra

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{Th}\,\theta}{\mathrm{tang}\,\Theta} = \frac{\mathrm{Th}\,\frac{1}{2}\,mn}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{MN}} = \text{const.}$$

Lorsque le point ω parcourt la droite L, dans la direction positive ou négative, depuis o jusqu'à l'infini, $\mathrm{Th}\,\theta$ prend toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à $+1$ ou à -1. A la limite des positions de ω, les droites correspondantes Ω feront avec O (de part et d'autre) un angle Δ *différent de l'angle droit* (à moins que p ne soit situé sur L), et déterminé par l'équation

$$(7) \qquad \mathrm{tang}\,\Delta = \frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{MN}}{\mathrm{Th}\,\frac{1}{2}\,mn}.$$

On arrive ainsi à la conception fondamentale de la théorie des parallèles de Lobatcheffsky (*), savoir, que *par un point p on peut mener deux droites parallèles à une droite donnée* L, c'est-à-dire, deux droites *qui rencontrent* L *à une distance infinie*.

Des équations (6) et (7) on tire

$$\text{Th}\,\theta = \frac{\text{tang}\,\Theta}{\text{tang}\,\Delta}, \tag{8}$$

de sorte que l'on aura $\text{Th}\,\theta < 1$ ou > 1 (et par suite θ réel ou imaginaire), suivant que Θ sera $< \Delta$ ou $> \Delta$. Il suit de là que toute droite Ω, menée par le point p, et comprise dans l'angle 2Δ, rencontrera la droite L en un point ω, à une distance *finie* de o, donnée par l'équation

$$\theta = \frac{1}{2k} \log \frac{\text{tang}\,\Delta + \text{tang}\,\Theta}{\text{tang}\,\Delta - \text{tang}\,\Theta}; \tag{9}$$

et toute droite Ω, menée par p *en dehors* de l'angle 2Δ, rencontrera la ligne L en un point situé à une distance *idéale* de o, ayant pour expression

$$\theta = \frac{1}{2k} \log \frac{\text{tang}\,\Theta + \text{tang}\,\Delta}{\text{tang}\,\Theta - \text{tang}\,\Delta} + i\,\frac{\pi}{2k}. \tag{10}$$

Les deux parallèles menées par le point p à la droite L (et la rencontrant à une distance *infinie*) marquent le passage des droites menées par p qui rencontrent L en des points situés à une distance *finie*, à celles qui rencontrent L en des points situés à une distance *idéale*. Nous considérerons les points de rencontre idéaux des droites Ω avec la droite L comme *des points de la droite situés au delà de l'infini*.

(*) Il serait peut-être plus juste de donner à cette théorie le nom de *théorie de Gauss*, depuis que la publication de la correspondance de ce grand géomètre nous a montré qu'il en est le premier inventeur. J. H.

L'équation (7) montre qu'en faisant varier la distance δ du point p à la droite L, l'*angle de parallélisme* Δ varie aussi, de sorte que le *nombre* qui exprime l'angle Δ sera une certaine fonction du *nombre* qui exprime la distance δ. Posons

$$\cot\Delta = \Phi(\delta),$$

Φ étant une fonction que nous déterminerons tout à l'heure. Nous remarquerons, en attendant, que, pour les diverses positions du point p sur la droite O perpendiculaire à la droite fixe L, toutes les droites Ω pour lesquelles le rapport $\frac{\operatorname{tang}\Theta}{\operatorname{tang}\Delta}$ a une valeur déterminée (inférieure, égale ou supérieure à l'unité) rencontreront L en un même point (à une distance finie, infinie ou idéale), déterminé par l'équation (8) ; et *vice versa*. Toutes les droites correspondantes à $\frac{\operatorname{tang}\Theta}{\operatorname{tang}\Delta} = \infty$, c'est-à-dire toutes les droites perpendiculaires à O rencontreront L au point idéal déterminé par $\theta = i\frac{\pi}{2k}$; et toutes les droites correspondantes à une autre valeur quelconque de $\frac{\operatorname{tang}\Theta}{\operatorname{tang}\Delta}$ plus grande que l'unité, rencontrant L au point idéal déterminé par l'équation (10), seront toutes perpendiculaires *à une même droite,* savoir à la droite perpendiculaire à L et menée par le point déterminé par la relation

$$\theta = \frac{1}{2k}\log\frac{\operatorname{tang}\Theta + \operatorname{tang}\Delta}{\operatorname{tang}\Theta - \operatorname{tang}\Delta}.$$

Il s'ensuit de là que tout point de rencontre idéal de deux droites peut être considéré comme le point de rencontre idéal de deux droites quelconques perpendiculaires à une même droite. Le point idéal où concourent toutes les perpendiculaires à une même droite (et qui est à la distance

$i\dfrac{\pi}{2k}$ de tous les points de cette droite) sera dit le *pôle* de cette droite.

Si, dans les formules précédentes, on suppose la constante $k = 0$, l'équation (6) se réduisant à

$$\frac{\theta}{\operatorname{tang}\Theta} = \frac{\frac{1}{2}mn}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{MN}},$$

il est évident que l'angle de parallélisme sera droit, quelle que soit la distance du point p à la droite L. Dans cette hypothèse, toutes les droites menées par p rencontrent L à une distance finie, à l'exception des *deux parallèles qui coïncident en une seule*, et qui rencontrent L en *deux points coïncidant à l'infini*. On a ainsi la conception fondamentale de la théorie des parallèles d'Euclide.

Les deux théories des parallèles, de Lobatcheffsky et d'Euclide, correspondent à deux manières différentes dont on peut concevoir la ligne droite relativement à ses points à l'infini. Suivant Lobatcheffsky, la ligne droite, à partir d'un quelconque de ses points o, s'étend à l'infini de part et d'autre de o; mais ses deux points à l'infini, des deux côtés opposés de o, sont distincts l'un de l'autre, de telle sorte que l'on ne pourra passer, sur la droite, d'un côté de o à l'autre, si l'on ne passe par o, dans *l'étendue finie* de la droite (c'est-à-dire, si l'on ne va des valeurs positives aux valeurs négatives de la distance z d'un point p de la droite au point o, en passant par zéro), ou bien si l'on ne traverse *une étendue idéale de la droite au delà de l'infini* (en faisant passer z par des valeurs imaginaires). Suivant Euclide, au contraire, la ligne droite s'étendant encore à l'infini de part et d'autre d'un quelconque de ses points o, ses points à l'infini, des deux côtés opposés de o, *coïncident* entre eux, ce qui revient à dire que la ligne droite est *une ligne indéfinie, rentrante en elle-même* ; de sorte que l'on pourra se transporter, sur la droite, d'un côté de o à l'autre, en passant soit par o, soit par le point de la droite situé à l'infini (c'est-à-dire que l'on ira des valeurs positives aux valeurs négatives de z, en passant soit par zéro, soit par ∞).

Si l'on considère maintenant, autour d'un point, le système des droites ω situées dans un plan P, et le système des plans Ω passant par ces droites et par une droite l, on aura, d'une manière analogue à l'équation (5), la relation

$$\frac{\sin m\omega}{\sin \omega n} = \lambda \frac{\sin \mathrm{M}\Omega}{\sin \Omega \mathrm{N}};$$

et, en supposant les droites m et n également inclinées sur la droite o d'intersection du plan P avec le plan O, mené par la droite l perpendiculairement à P, et par suite les plans M et N également inclinés sur le plan O, on aura, par analogie avec l'équation (6),

$$\frac{\tang \theta}{\tang \Theta} = \frac{\tang \frac{1}{2} mn}{\tang \frac{1}{2} \mathrm{MN}} = \text{const.}$$

Tandis que ω tourne dans le plan P, à partir de o, dans le sens positif ou dans le sens négatif, tang θ prend toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à $+\infty$ ou à $-\infty$; il en sera donc de même pour tang Θ. Donc, dans ce cas, il n'y a plus lieu de faire les mêmes remarques que ci-dessus au sujet de la distance finie, infinie ou idéale de Ω à P. Nous observerons seulement qu'en déterminant l'angle Δ par l'équation

$$\tang \Delta = \frac{\tang \frac{1}{2} \mathrm{MN}}{\tang \frac{1}{2} mn}, \quad \text{d'où} \quad \tang \theta = \frac{\tang \Theta}{\tang \Delta},$$

l'angle Δ sera une fonction de l'angle δ, compris entre la droite l et le plan P, de sorte qu'on aura entre Δ et δ une relation de la forme

$$\cot\Delta = \varphi(\delta).$$

(*La suite prochainement.*)