# Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 7 (1868), p. 181-191
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__181_0>

# SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

## *Questions* 745 *et* 814

(voir 2e série, t. IV, p. 430 et t. VI, p. 288) ;

PAR M. G.-B. MAFFIOTTI,
Étudiant à l'Université de Turin.

745. *D'un point pris dans le plan d'une courbe géométrique, on mène toutes les tangentes à cette courbe ; on divise le rayon de courbure relatif à chaque point de contact par le cube de la distance de ce point au point fixe d'où émanent les tangentes : la somme des quotients ainsi obtenue est nulle.* (MANNHEIM.)

Soient

$$\varphi(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe, et $(x_0, y_0)$ le point fixe; $(x_i, y_i)$ un point de contact quelconque des tangentes menées du premier point à la courbe, et $d_i$ la distance des deux points $(x_0, y_0)$, $(x_i, y_i)$. On aura

$$\frac{x_i - x_0}{\frac{d\varphi}{dy_i}} = -\frac{y_i - y_0}{\frac{d\varphi}{dx_i}} = k,$$

d'où

$$d_i = k\left[\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le rayon de courbure de la courbe donnée, exprimé en fonction des dérivées partielles de la fonction $\varphi$, est

$$\frac{\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\varphi}{dx^2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2-2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2}.$$

Tout revient donc à démontrer qu'on a

$$\sum\frac{1}{k^3\left[\frac{d^2\varphi}{dx_i^2}\left(\frac{d\varphi}{dy_i}\right)^2-2\frac{d^2\varphi}{dx_i\,dy_i}\frac{d\varphi}{dx_i}\frac{d\varphi}{dy_i}+\frac{d^2\varphi}{dy_i^2}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)^2\right]}=0,$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs de $x$ et $y$ qui sont racines communes aux équations

$$\varphi(x,y)=0,$$
$$F(x,y)=(x-x_0)\frac{d\varphi}{dx}+(y-y_0)\frac{d\varphi}{dy}=0;$$

or il est aisé de vérifier qu'on a

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{dF}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{dF}{dy}$$
$$=k\left[\frac{d^2\varphi}{dx^2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2-2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right].$$

L'identité à démontrer devient donc, en remplaçant $k$ par une des valeurs que donne l'équation (1),

$$(1)\qquad \sum\frac{\left(\frac{\frac{d\varphi}{dy_i}}{x_0-x_i}\right)^2}{\frac{d\varphi}{dx_i}\frac{dF}{dy_i}-\frac{d\varphi}{dy_i}\frac{dF}{dx_i}}=0.$$

Soit $m$ le degré de $\varphi$ : le degré de F sera $m-1$, et la somme des degrés de ces deux fonctions sera $2m-1$ ; le degré de

$$\left(\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{x_0-x}\right)^2$$

est $2m - 4$, c'est-à-dire inférieur de plus de deux unités à la somme des degrés de $\varphi$ et de F; donc, d'après un théorème d'analyse, la somme qui forme le premier membre de l'équation (1) est nulle.

814. *Étant donnée une surface* S *du second ordre à centre, si l'on imagine une surface de révolution du second ordre ayant un de ses foyers au centre de la surface* S *et touchant les quatre faces d'un quelconque des tétraèdres conjugués par rapport à la surface* S, *la longueur de l'axe équatorial de la surface de révolution conserve une valeur constante, quel que soit le tétraèdre considéré. On suppose la surface de révolution autour de l'axe qui passe par le centre de la surface* S.

(L. Painvin.)

Cette proposition se déduit simplement du théorème qui suit :

Si

$$E_{00}u^2 + 2E_{01}uv + E_{11}v^2 + \ldots = 0$$

est l'équation d'une surface du second degré en coordonnées tangentielles, et si

$$a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + \ldots = 0$$

est l'équation d'une autre surface du même degré en coordonnées rectilignes, l'équation de condition pour que la première surface touche les faces d'un tétraèdre quelconque conjugué à la première est

$$a_{00}E_{00} + 2a_{01}E_{01} + a_{11}E_{11} + \ldots = 0.$$

(*Voir* O. Hesse, *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, etc., p. 174.)

Soit

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 - 1 = 0$$

l'équation de la surface S rapportée à ses axes. Quant à la surface de révolution, j'observe que si

$$\begin{aligned} A &= \alpha u + \beta v + \gamma w + 1 = 0, \\ A' &= \alpha' u + \beta' v + \gamma' w + 1 = 0 \end{aligned}$$

sont les équations des deux foyers en coordonnées tangentielles, l'équation

$$k = \frac{A \,.\, A'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

sera l'équation de la surface, puisqu'elle exprime que le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur un plan tangent est constant. La constante $k$ est le carré du demi-axe équatorial.

Si l'un des foyers est à l'origine, l'équation devient, en chassant les dénominateurs,

$$k\,(u^2 + v^2 + w^2) - (\alpha u + \beta v + \gamma w + 1) = 0,$$

et l'équation de condition pour que cette surface touche un tétraèdre quelconque conjugué de S est ici

$$k\,(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + 1 = 0, \quad k = \frac{-1}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2};$$

donc $k$ est constant.

Je remarquerai en passant que le théorème de O. Hesse, que je viens de citer, aurait fourni une démonstration plus simple des questions 760, 761 (*voir* t. VI, p. 219), car il donne immédiatement les relations

$$R^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1,$$

$$R^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{y_0^2}{p} + \frac{z_0^2}{q} - 2x_0,$$

qui démontrent les théorèmes de M. Painvin.

## *Question* 842

(voir p. 44).

Hexagramme de Pascal (réciproque). — *Si trois angles ont leurs sommets en ligne droite, leurs côtés sont les côtés opposés d'un hexagone inscriptible dans une conique.* (J.-E. Barbier.)

Cette question a été résolue par MM. André (Raoul), du lycée Louis-le-Grand; Lavollée, du même lycée; Lipmann, du lycée Napoléon; Drouot et Aldacotche, étudiants à Metz; Léon Bédorez, Jules Millet et Paul Endrès, du lycée de Douai; Willière, professeur à Arlon (Belgique); Tuffraud, de Sainte-Barbe.

Dans presque tous les cours de géométrie analytique, les professeurs indiquent le moyen de construire une conique dont on connaît cinq points, et démontrent ainsi indirectement la réciproque de l'Hexagramme de Pascal; la description organique des coniques par *Newton*, le procédé de *Maclaurin* et de *Braikenridge*, démontrent aussi cette proposition réciproque.

MM. *Léon Bédorez* et *Paul Endrès* font voir, dans la solution qu'ils nous adressent, que la question proposée se ramène au théorème de Maclaurin.

M. Lavollée remarque que le théorème de Pascal se déduit de cette proposition : Si trois coniques ont une corde commune, deux autres cordes communes aux coniques prises deux à deux vont se couper sur la première corde commune; et il se trouve conduit à déduire la réciproque de l'Hexagramme de la proposition suivante : Si l'on a trois droites issues d'un même point et deux sections coniques ayant pour corde commune une de ces deux droites, les deux autres points d'intersection et les quatre points de rencontre des deux coniques par les deux autres droites sont six points situés sur une même conique.

Enfin M. Tuffraud se sert élégamment de la considération des projections coniques :

Supposons, dit-il, que les trois angles A, B, C qui forment l'hexagone $abc$, $a'b'c'$ soient dans un plan P ($a$ et $a'$ désignent les sommets de l'hexagone qui proviennent de l'intersection d'un côté de l'angle B par un côté de l'angle C, etc.). Menons par la droite BC un plan quelconque, et dans ce plan trois droites BS, AS, CS qui forment entre elles des angles de 60 degrés. Si l'on considère alors un plan Q mené n'importe où, mais parallèle au plan BSC, les projections coniques, sur ce plan Q et par rapport au point S, des droites concourantes, $Bc$, $Bc'$, seront deux droites parallèles entre elles et à BS. De même, les projections coniques des droites $Ab$ et $Ab'$ seront deux parallèles à AS, et celles des droites $Ca$, $Ca'$ deux parallèles à CS. Alors la projection conique de la figure $abc$, $a'b'c'$ sur le plan Q sera un hexagone dont les côtés opposés seront parallèles et formeront des angles de 60 degrés : ce sera un hexagone régulier. Le cône ayant pour sommet le point S, et pour directrice le cercle circonscrit à cet hexagone, coupera le plan P suivant une conique passant par les points $abc$, $a'b'c'$. B.

---

*Même question ;*

PAR M. BARBIER.

Les équations des six côtés peuvent s'écrire :

*Premier angle.*

Côté (1)... $A + aD = 0$. Côté (4).. $A - aD = 0$.

*Deuxième angle.*

Côté (3)... $B + bD = 0$. Côté (6)... $B + bD = 0$.

*Troisième angle.*

Côté (5)... $C + cD = 0$. Côté (2).. $C - cD = 0$.

$D = 0$ est l'équation de la droite qui contient les trois sommets des angles, et $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ sont les équations de droites menées par les sommets des angles d'une façon convenable.

$$(A + aD)(B + bD)(C + cD) = (A - aD)(B - bD)(C - cD)$$

est une équation du troisième degré à laquelle satisfont les coordonnées des sommets de l'hexagone et des sommets des angles, et même d'un point quelconque de la droite $D = 0$.

Supprimons le facteur D qui nous indique cette circonstance, nous aurons l'équation d'une ligne passant par les sommets de l'hexagone

$$aBC + bCA + cAB + abcD^2 = 0.$$

Elle est du second degré; elle représente donc une conique.

---

## *Question* 844

(voir p 96);

PAR MM. R. DE LAJUDIE ET E. SALVY.

*Par un point fixe* O *sur la circonférence d'un cercle, on mène deux cordes* OA, OB *dont le produit est constant; on demande l'enveloppe de la sécante* AB.

(DUPAIN.)

Toutes les sécantes AB sont tangentes à une circonférence décrite du point O comme centre avec un rayon égal à $\frac{a^2}{2R}$; $a^2$ étant le produit constant, et R le rayon de la circonférence donnée, car en nommant OI la perpendiculaire abaissée sur AB, on a, d'après un théorème bien connu,

$$OA \times OB = a^2 = OI \times 2R.$$

On arrive au même résultat par le calcul.

*Note.* — Ont résolu la même question : MM. Laisant, capitaine du génie à Brest; Bonneau, élève de l'École de Sainte-Barbe; Venceslas Niebylowski, élève à l'École Normale supérieure; Léon Arnoyer, de Carpentras; Bès, de Berg; Jouffray, du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Darboux); Gabriel Lippmann, du lycée Napoléon; A. Hilaire; André Raoul, élève au lycée Louis-le-Grand; Auguste Macé, élève du lycée de Grenoble; P. Goyart, élève du lycée de Lyon (classe de M. Russet); Porte; Jules Barbier, élève du lycée de Grenoble; Drouot et Aldacotche, étudiants à Metz; Welsch et Herment, élèves du lycée de Metz (classe de M. Ribout); E. Jasseron, élève du lycée de Besançon (classe de M. Chevilliet); Adrien Guebhard, élève du lycée Saint-Louis; F.-P. Pourcheiroux, élève du lycée Charlemagne; Arthur Millasseau, élève du lycée de Douai (classe de M. Painvin); H. Ledoux, élève du lycée de Douai (classe de M. Painvin); Jules Lefebvre, élève de l'École Normale supérieure; Julien Boulanger, élève du lycée de Dijon (classe de M. Marguet); Lesquière, du lycée de Caen; de Villepin, du collége de Stanislas (classe de M. Gros); Fulgence Armanet, de l'École Centrale; O. Espanet, du lycée de Nîmes (classe de Mathématiques élémentaires); Anna Strozzi; M.-D. Thomas, de Taibach; Jannsenn, du lycée de Douai; E. Lattès et G. Lecœur, du lycée de Rouen.

M. Laisant fait remarquer :

1° Que cette enveloppe convient à toute circonférence égale à la première passant par le point O;

2° Que si $a^2 > 4R^2$, on a toujours une enveloppe réelle, bien qu'il soit impossible de tracer un seul système de rayons OA, OB satisfaisant à la condition;

3° Que ce dernier résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Soient* O *une circonférence de centre* O, *et* O' *une autre circonférence passant par le point* O. *Toute tangente à la circonférence* O *coupera la circonférence* O' *en deux points* A *et* B *réels ou imaginaires tels, que le produit* OA.OB *sera constant.*

## QUESTIONS.

855. Démontrer que la distance $\delta$ d'un point $(x, y, z)$ à une droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ est donnée, dans un système de coordonnées obliques quelconque, par la formule

$$\begin{aligned}\rho^2\delta^2 = {} & (bz - cy)^2 \sin^2 yz + (cx - az)^2 \sin^2 zx + (ay - bx)^2 \sin^2 xy \\ & + 2(bz - cy)(cx - az)(\cos yz \cos zx - \cos xy) \\ & + 2(cx - az)(ay - bx)(\cos zx \cos xy - \cos yz) \\ & + 2(ay - bx)(bz - cy)(\cos xy \cos yz - \cos zx),\end{aligned}$$

en posant

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

(HOUSEL.)

856. Soient M et $M_1$ deux points d'une ellipse, tels que les produits des coefficients angulaires des diamètres passant par ces points soient $-\frac{b^3}{a^3}$. En appelant $\rho$, $\rho_1$ les rayons de courbure en ces points, $r$, $r_1$ les rayons de courbure de la développée aux points correspondant à ceux de l'ellipse, on a les deux relations

$$\rho\rho_1 = ab, \quad \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^4 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^3.$$

(A. SARTIAUX.)

857. D'un point M situé dans le plan d'une courbe algébrique on mène toutes les tangentes à cette courbe et une droite quelconque MA. Aux points de contact des tangentes issues de M on construit les coniques ayant quatre points confondus sur la courbe et tangentes à MA. Si $t$ désigne la distance comptée sur MA du point M au

point de contact de l'une de ces coniques et R le rayon de courbure de cette conique en ce point de contact, on a

$$\sum \frac{R}{t^4} = 0,$$

la somme s'étendant à toutes les coniques.

(A. Ribaucour.)

858. D'un point M situé dans le plan d'une conique on mène à celle-ci les deux tangentes MA et MB, puis par M on mène une droite MC.

Aux points A et B on construit les coniques ayant quatre points confondus avec la proposée et tangentes à MC.

Démontrer que : 1° ces coniques touchent MC au même point C; 2° que si l'on faisait tourner l'une d'elles de manière à la rabattre autour de MC du côté de la première, les coniques ainsi obtenues auraient en ce point un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'elles auraient en C quatre points communs confondus. (A. Ribaucour.)

859. Démontrer la même proposition pour les courbes du troisième degré, lorsque M est sur la polaire d'un point d'inflexion. (A. Ribaucour.)

860. Un cercle (C) de centre O roule sur une droite. Trouver le lieu des points d'inflexion des cycloïdes raccourcies décrites par tous les points d'un cercle décrit sur un rayon du cercle (C) comme diamètre. (A. Ribaucour.)

861. Soit (C) un cercle de centre O; OX un diamètre quelconque. On prend sur OX une longueur OM sur laquelle, comme diamètre, on décrit un autre cercle (D). D'un point quelconque A de (C) on mène la droite AO qui rencontre le cercle (D) en un point B. Avec AB comme rayon on décrit un cercle, dont le centre est en A; on effectue la même construction en chacun des points de (C).

Les cercles ainsi obtenus ont une enveloppe. Déterminer les sommets de cette courbe.

Trouver la nature du lieu de ces sommets, lorsque M se déplace sur le diamètre OX. (A. Ribaucour.)

862. Lorsqu'une chaînette roule sur une droite, une droite quelconque de son plan enveloppe une développante de parabole. (A. Ribaucour.)

863. Construire un triangle, connaissant les trois parallèles aux trois côtés, qui passent par le centre du cercle inscrit. (Lemoine.)

864. Construire un triangle, connaissant le ssommets des triangles équilatéraux construits sur les côtés.

(Lemoine.)

865. On circonscrit à une surface de vis à filet carré une surface développable dont les divers plans tangents sont parallèles aux plans tangents à un cône du second degré, la projection de la courbe de contact sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'héliçoïde est une podaire de conique. (Laguerre-Verly.)