NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. RIBAUCOUR

Sur le rayon de courbure des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 171-176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__171_1>

SUR LE RAYON DE COURBURE DES CONIQUES;

Par M. A. RIBAUCOUR.

On a souvent besoin de construire le rayon de courbure d'une conique définie par certaines conditions, soit, par exemple, que l'on veuille trouver le point de contact d'un rayon lumineux réfléchi avec son enveloppe; soit que l'on veuille construire le rayon de courbure d'une polaire; soit enfin dans toute autre question où il est commode de remplacer la courbe par une conique osculatrice.

Dans le cours de l'École Polytechnique, on a l'occasion de construire une surface du second degré osculatrice à une surface de révolution tout le long d'un parallèle; les élèves sont censés connaître la construction du rayon de courbure d'une conique; il ne sera donc pas inutile d'appeler un moment l'attention sur ce point.

Toutes les constructions connues peuvent se déduire de la proposition suivante :

Soit A un point d'une conique (A), M un point de la tangente en A à (A); soient P et D les points d'intersection de la normale en A à (A) avec les perpendiculaires abaissées du point M sur la polaire de ce point M et sur le diamètre de la conique aboutissant en A.

Quelle que soit la position du point M *sur la tangente en* A *à* (A), *le segment* PD *est constant; ce segment est égal au rayon de courbure de* (A) *en* A.

Je substituerai à la démonstration que j'ai trouvée de cette proposition, celle que m'en a donnée un géomètre bien connu.

Désignons par x la distance MA, et par ω l'angle de la polaire de M avec la normale en A. A une valeur de x correspond une et une seule valeur de ω, et réciproquement; donc x est liée à ω par une relation de la forme

$$x.\operatorname{tang}\omega - Ax + B.\operatorname{tang}\omega = C,$$

où A, B et C sont des constantes.

Désignons par δ l'angle de la normale en A et du diamètre aboutissant en ce point; faisons x infinie; dans l'équation précèdente ω est égal à δ. Donc

$$A = \operatorname{tang}\delta;$$

pour $\omega = 90^\circ$, on a

$$x = 0, \quad B = 0.$$

On voit donc que l'on a définitivement

$$x(\operatorname{tang}\omega - \operatorname{tang}\delta) = C.$$

Or, le premier membre a pour valeur l'expression du segment PD; on voit donc que, quelle que soit la position de M sur la tangente en A, le segment PM est constant; si maintenant on suppose que M soit à une distance infiniment petite du premier ordre de A, la perpendiculaire à la polaire peut être considérée comme normale à la conique; donc la limite du point d'intersection de cette droite et de la normale en A est le centre de courbure de (A) en A.

La proposition énoncée résulte immédiatement de ce qui précède. Passons aux applications.

Supposons d'abord que le point M soit tellement choisi, qu'il ait pour polaire la normale en A à (A), désignant par R le rayon de courbure en A,

$$-x.\tang\delta = R.$$

Abaissons du centre O de (A) la perpendiculaire ON sur la tangente en A, on a

$$\tang\delta = \frac{AN}{ON};$$

il en résulte

$$\frac{AM.AN}{ON} = R;$$

mais les deux droites OM et ON sont deux diamètres conjugués de (A); si donc on désigne par b le demi-diamètre de cette courbe parallèle à la tangente en A, d'après une proposition bien connue,

$$AM.AN = b^2;$$

on voit donc que

$$R = \frac{b^2}{ON},$$

ce qui est la formule de M. Charles Dupin.

Si (A) est une parabole et si l'on prend M sur la directrice de celle-ci, la perpendiculaire MD est la directrice, la droite MP passe par le foyer; d'ailleurs il est évident que AP et AD sont deux segments égaux; on a donc cette proposition connue :

Si par le foyer F *d'une parabole* (A) *on élève une perpendiculaire au rayon* FA, *et qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontre en* P *avec la normale en* A *à* (A), *le segment* AP *est la moitié du rayon de courbure en* A.

J'ai fait voir que l'on a

$$R = AP - AD;$$

mais comme on a

$$AP = AM . \tang \omega,$$

$$AD = AM . \tang \delta,$$

il en résulte

$$AD = \tang \delta . \cot \omega . AP.$$

Par le point P, élevons une perpendiculaire à la normale en A à (A) et prolongeons-la jusqu'à la rencontre en B avec le diamètre OA; puis par B, menons la droite BC parallèle à la polaire du point M, si C est le point d'intersection de cette droite avec la normale en A; il est visible que

$$PC = AP . \tang \delta . \cot \omega;$$

donc on a

$$R = AP - PC,$$

c'est-à-dire que le point C est le centre de courbure relatif au point A.

Supposons que le point M soit sur un des axes de la conique, MP coïncide avec cet axe; donc

Par le point P *où la normale en* A *à* (A) *rencontre un axe, on élève une perpendiculaire* PB *à cette normale; par le point* C *où* PB *rencontre le diamètre* OA, *on mène la perpendiculaire à l'axe : cette droite passe par le centre de courbure relatif au point* A.

Cette construction est celle donnée par M. Mannheim dans son Cours à l'École Polytechnique.

En prenant successivement le point M sur chacune des directrices de la conique, désignant par ρ et ρ' les distances du point A aux foyers F et F', par i l'angle d'un de ces rayons vecteurs avec la normale en A, on voit de suite que

$$\frac{2}{R\cos i} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1},$$

ce qui est la formule du marquis de l'Hospital, plus souvent appelée *formule de Petit*.

La comparaison des constructions effectuées, en supposant successivement le point M sur le grand axe et sur une directrice, conduit à la construction la plus connue.

Désignons par i l'angle de la normale en A et du rayon vecteur FA, par α l'angle de la normale en A et du grand axe, par P le point de rencontre de ces deux dernières droites; on a, d'après ce qui précède,

$$R = AP\,(1 + \operatorname{tang}\delta . \operatorname{tang}\alpha),$$

$$R = \frac{AF}{\cos i}(1 + \operatorname{tang}\delta . \cot i).$$

Dès lors, si l'on remarque que

$$\frac{AP}{\sin(\alpha + i)} = \frac{AF}{\sin\alpha},$$

on a l'équation de condition

$$\operatorname{tang}\delta . \operatorname{tang}\alpha = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos i} - \sin(\alpha + i)}{\sin(\alpha + i) - \dfrac{\cos\alpha}{\sin i}}.$$

Il en résulte immédiatement

$$1 + \operatorname{tang}\delta . \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\cos^2 i}:$$

per conséquent, on a aussi

$$R = \frac{AP}{\cos^2 i},$$

ce qui est la formule que l'on donne habituellement pour le rayon de courbure des coniques.

On en déduit immédiatement la construction ordinaire du centre de courbure.